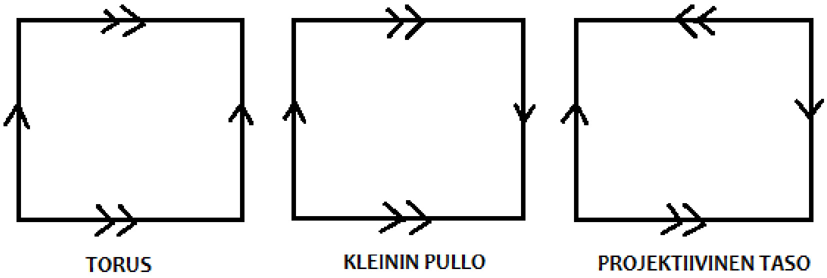
Matematiikkaa kaikille
Syksy 2016
Pienryhmätehtävät 5 - **Ohjaajille**

Tehtävä

(1) Pelaa ristinollaa toruksella, kleinin pullolla tai projektiivisella tasolla vierustoverisi kanssa.

Huomioita

Kannattaa piirtää apuviivat ruudukon ulkopuolelle, sillä muuten kolmen suorat menevät helposti ohitse. Alla vielä eri tasojen esitysmuodot.



Tehtävä

(2) Askartele ohjaajien johdolla möbiuksen nauha ja leikkaa se keskiviivaa pitkin halki. Ennen leikkausta koita "nähdä" mitä leikkaaminen synnyttää.

Huomioita

Kannattaa leikata pitkiä paperinauhoja.

Tehtävä

(3) Askartele hyperbolista tasoa liitteenä olevien ohjeiden[1] mukaan ja ohjaajan opastuksella.

(a) Piirrä hyperboliseen tasoon kolmio ja mittaa sen kulmien summa.

(b) Vaikuttaako kolmion koko kolmion kulmien summaan?

Huomioita

Kannattaa olla tarkkana, että kaikissa kulmissa on varmasti seitsemän kolmiota. Kolmioita piirtäessä kannattaa käytää apuna viivotinta, sillä hyperbolinen taso taipuu litteäksi jännillä tavoilla.

Kolmion kulmien summaa voi tarkastella esimerkiksi leikkaamalla kulmat irti tasosta ja asettamalla ne vierekkäin. Tässä riittää siis vertailu euklidiseen tasoon $\mathbb{R}^2$, jossa kolmion kulmien summan on aina $180°$. Ennen leikkaamista kulmat kannattaa värittää - tällöin pysyy itse kärryillä, mikä paperipalan kulmista oli yksi alkuperäisen kolmion kulmista.

[1] Liimausohjeet on kopioitu Jeffrey Weeksin kirjasta "The Shape of Space". Olkoon tämä samalla lukuvinkkinä!

Kolmion koon kasvaessa kolmion kulmat muuttuvat terävimmiksi. Jos haluaa saada isoja eroja euklidiseen tasoon verrattuna, kannattaa siis tehdä isoja kolmioita.

Kannattaa myös huomata, että askartelumallissa kaarevuus ei jakaudu tasaisesti kaikille pisteille, vaan sen sisällä on kolmioita, joissa euklidinen geometria pätee. Mallissa on siis pisteitä, joille kaarevuus kasautuu. Yritä piirtää kolmio, jonka sisäpuolelle jää kaksi tällaista kaarevuuspistettä. (Sen pitäisi olla mahdotonta – eksplisiittinen todistus vielä tosin uupuu[2].)

Tehtävä

(4) Katso oheista pienistä kolmioista koostuvaa laatoitusta. Väritä kaikki alkupistettä koskevat kolmiot punaisella, ja kirjoita ylös niiden lukumäärä. Väritä seuraavaksi sinisellä kaikki kolmiot jotka koskettavat jotain punaista kolmiota ja kirjoita ylös punaisten ja sinisten kolmioiden lukumäärä. Jatka värittämällä vuorotellen sinisiksi ja punaisiksi kolmiot, jotka koskettavat punaisia tai sinisiä kolmioita, ja pidä kirjaa montako kolmiota kunkin askeleen jälkeen on yhteensä väritetty.

(a) Kasvaako väritettyjen kolmioiden määrä kuten jokin tuttu polynomi?

(b) Tee seuraavaksi sama hyperbolisella tasolla, ja vertaa tason tapahtumaan.

Jos laskeminen on hankalaa tekemälläsi tasolla, voit käyttää myös oheista kuvaa[3].

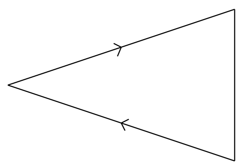
Huomioita

Tosassa kolmioita löytyy suunnilleen cr^2-verran, missä c on jokin vakio ja r on ympyrän säde. Hyperbolisessa tasossa kolmioiden määrä kasvaa nopeammin. Annetussa kuvassa on "tason keskipisteen" ympärillä seitsemän kolmiota, näitä koskee 28 seuraavan askeleen kolmiota, joita puolestaan koskee 77 kolmiota. Toisin sanoen etäisyyksillä 1,2 ja 3 voluumit ovat 7, 35 ja 112. Tasossa vastaavat voluumit ovat 6, 18 ja 30.

Tehtävän ideana on huomata, että hyperbolisessa tasossa tilavuus kasvaa huomattavasti euklidista tasoa nopeammin.

Tehtävä

(5) Mitä kaksiulotteista kappaletta oheinen kuvio esittää?



Huomioita

Älä lue tätä ennen, kuin olet yrittänyt itse visualisoida kappaletta! Kappaleesta tulee Möbiuksen nauha. Tämän voi perustella esimerkiksi seuraavasti: leikkaa kolmio vaakatasossa kahtia. Samaista nämä reunat kaksoisnuolilla. Siirrä alempi kolmio ylemmäksi ja peilaa se vaakasuunnassa. Näin vastakkain tulee kolmioiden sivut, jotka ovat samat, joten ne voi yhdistää. Saat siis nelikulmion, jonka ylä- ja alareuna ovat sama reuna eri suuntiin – siis Möbiuksen nauha.

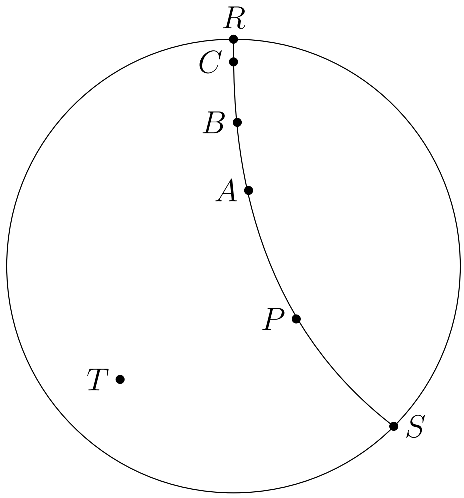
[2]Todistus uupuu minulta ja muutamalta kaveriltani, ei varmaankaan matematiikkayhteisöltä... :)

[3]Kuva kopioitu sivulta http://maxwelldemon.com/2008/10/25/mathematics-computers-and-zeilberger/

Tehtävä

(6) Tutkitaan euklidisia ja hyperbolisia etäisyyksiä. Alla oleva kuva esittää Poincarén kiekkoa, ja pisteet R ja S kuuluvat sen reunaan. Pisteiden P ja A välinen hyperbolinen etäisyys saadaan laskettua euklidisista etäisyyksistä seuraavasti:

$$|PA|_h = log \frac{|RP| \cdot |SA|}{|RA| \cdot |SP|}.$$



(a) Mittaa hyperboliset etäisyydet $|PA|_h$, $|PB|_h$ ja $|PC|_h$. Mitä hyperboliselle etäisyydelle tapahtuu kiekon reunalla? Vinkki: voit piirtää vastaavan mutta isomman ympyrän pöytään ja mitata etäisyydet esimerkiksi narun avulla.

(b) Miltä näyttää ympyrä, jonka hyperbolinen keskipiste on kuvan piste T?

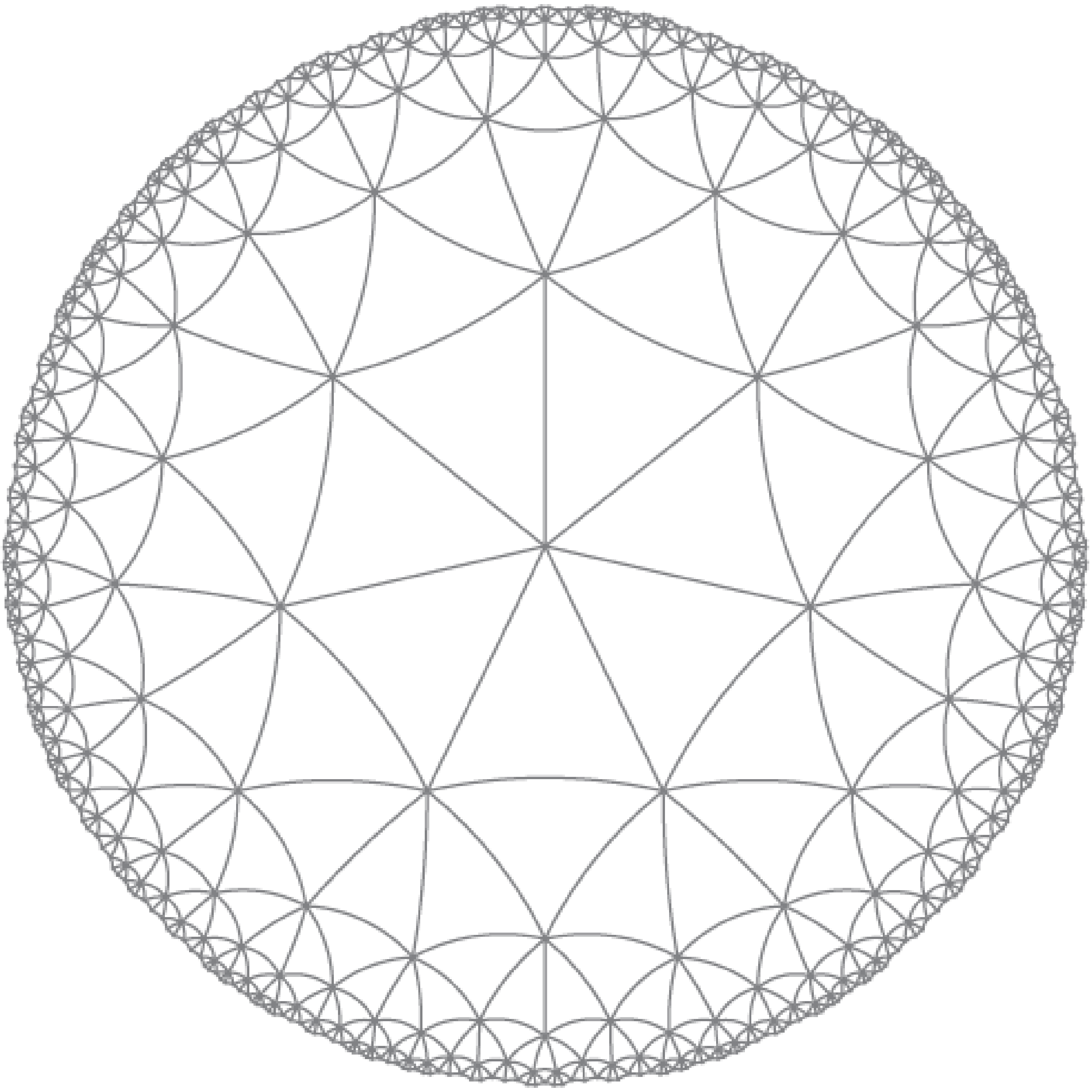
(c) Onko olemassa ympyrää, jonka euklidinen ja hyperbolinen keskipiste ovat samat?

Huomioita

Kannattaa googlata esimerkiksi "Poincarén kiekko" tai "Poincaré disk model". Liitteenä on myös Riikan kirjoittama essee hyperbolisesta geometriasta – kannattaa vilkaista!

Kiekossa etäisyydet reunalla menevät kohti ääretöntä. Pisteen T ympärille muodostettu ympyrä on siis euklidisessa mielessä kallellaan ison ympyrän keskipistettä kohti, sillä etäisyys on reunalle mentäessä "tiheämpää".

Euklidinen ja hyperbolinen keskipiste on sama ympyröille, joiden keskipiste on ison ympyrän keskipiste. Tällöin ympyröiden säde on kuitenkin eri riippuen siitä, tarkastellaanko euklidisia vai hyperbolisia etäisyyksiä.



Kuva 1: Hyperbolista kolmiointia

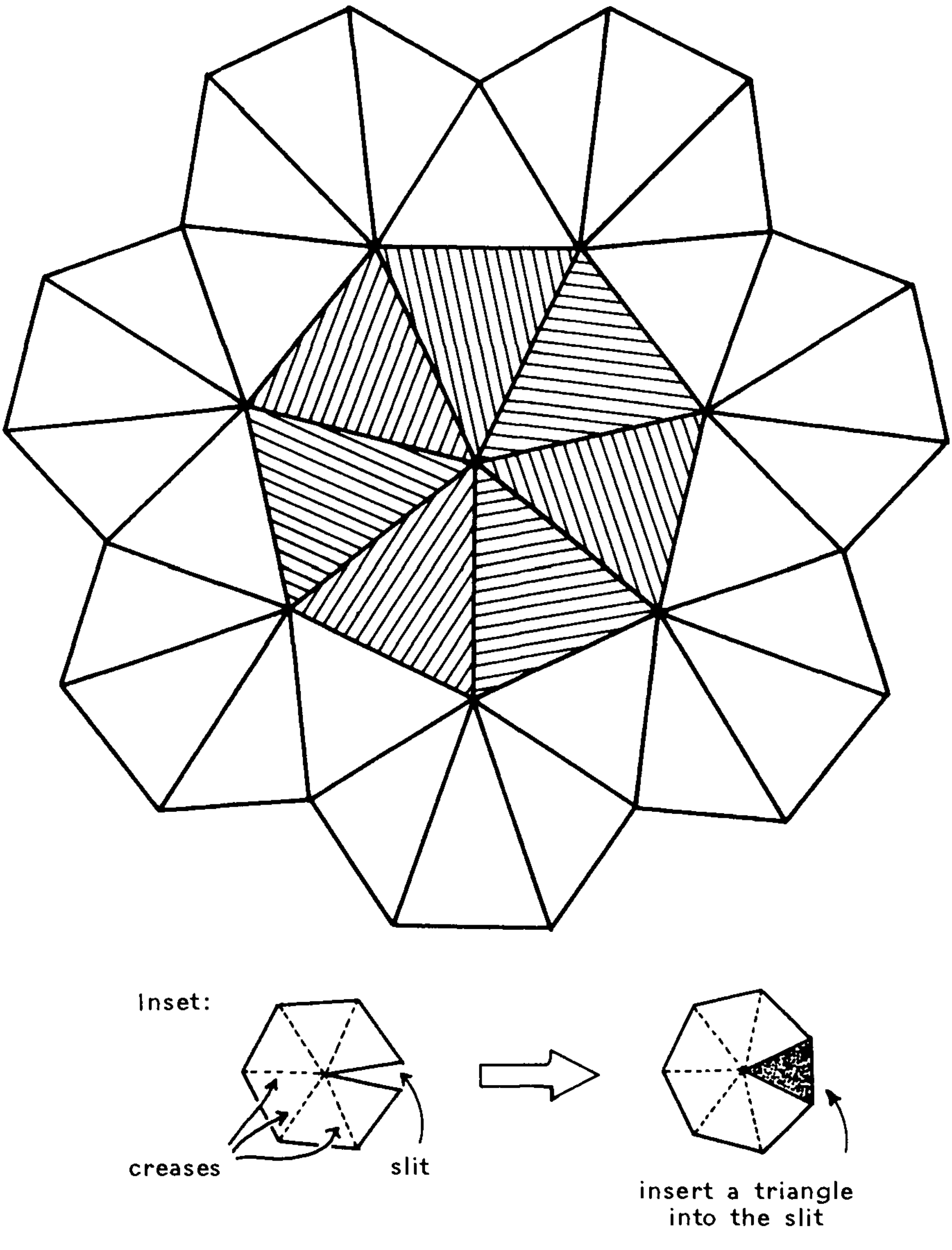


Figure 10.3 (*See Exercise 10.1*) Tape equilateral triangles together so that seven meet at each vertex. The inset shows a good way to get started.