Matematiikkaa kaikille
Syksy 2016
Pienryhmätehtävät 4 - **Ohjaajille**

Tehtävä

(1) Ota ryhmällesi käyttöön yksi iso jumppapallo sekä narua. Muodosta narusta silmukka, joka mahtuu juuri ja juuri pallon ympäri. Mikä on pallon ympärysmitta?

Lisätkää silmukkaan metrin verran narua. Asettakaa se pallon ympärille ja yrittäkää pitää narun jokainen piste yhtä kaukana pallon pinnasta. Mikä on narun etäisyys pallon pinnasta?

Entä jos sama tehtäisiin maapallon pinnalla? Entä jos sama tehtäisiin jonkin ihan pienen pallon pinnalla?

Huomioita

Tässä täytyy muistaa ympyrän kehän pituuden kaava $p = 2\pi r$. Olkoot pienemmän ympyrän säde r_1 ja isomman ympyrän säde r_2. Koska isomman ympyrän kehän pituus on metrin verran pienempää ympyrää pidempi, niin

$$\begin{aligned} 2\pi r_2 &= 2\pi r_1 + 1m \\ \Leftrightarrow 2\pi r_2 &= 2\pi(r_1 + \frac{1}{2\pi}) \\ \Leftrightarrow r_2 &= r_1 + \frac{1}{2\pi}. \end{aligned}$$

Tämä tarkoittaa sitä, että metrin lisäys ympyrän kehän pituuteen kasvattaa sädettä aina $1/2\pi \approx 0,159$ metrin verran, alkuperäisen ympyrän koosta riippumatta.

Tehtävä

(2) Otetaan korttipakka jossa on 52 korttia. Matematiikan ala nimeltään kombinatoriikka kertoo, että korttipakan kortit voi laittaa järjestykseen

$$52! = 52 \cdot 51 \cdot 50 \cdot \ldots \cdot 1 \approx 8 \cdot 10^{67}$$

eri tavalla.

Mikäli maailmassa olisi ihmisiä 10 miljardia eli 10^{10} kappaletta, ja he sekottaisivat kukin korttipakkaa kerran sekunnissa ilman taukoja ja saisivat aikaan aina sellaisen sekoituksen mitä ei ole ennen nähty, miten monta vuotta heidän pitäisi sekoittaa pakkojaan jotta kaikki eri sekoitukset tulisi käytyä läpi?

(Yhdessä vuodessa on karkeasti sata miljoonaa sekuntia eli 10^8 sekuntia. Universumin ikä on noin 10 miljardia vuotta eli 10^{10} vuotta.)

Entä jos ihmisiä ei olisikaan vain meidän tähtemme ympärillä? Havaitussa universumissa on noin 10 miljardia (10^{10}) galaksia. Oletetaan, että jokaisessa galaksissa on noin 100 miljardia (10^{11}) tähteä. Laitetaan jokaisen tähden ympärille 10 planeettaa, joissa kussakin kymmenen miljardia ihmistä sekoittaa korttipakkoja kerran sekunnissa. Monta vuotta nyt menee kaikkien sekoitusten läpikäyntiin?

Huomioita

Laskujen helpottamiseksi luvun 52 kertomaa kannattaa arvioida ylöspäin lukuun 10^{68}. Merkitään kaikkien eri sekoitusten läpikäyntiin tarvittavien vuosien lukumäärää kirjaimella x. Ensimmäisessä tapauksessa saadaan yhtälö

$$10^{10} \cdot 10^{8} \cdot x = 10^{68},$$

josta ratkaistaan $x = 10^{50}$. Verratkaa tätä maailmankaikkeuden ikään ja ihmetelkää...

Toisessa tapauksessa yhtälö on muotoa

$$10^{10} \cdot 10^{11} \cdot 10 \cdot 10^{10} \cdot 10^{8} \cdot x = 10^{68},$$

josta ratkaistaan $x = 10^{28}$. Tämä on edelleen hirmuisen iso luku.

Tehtävä

(3) Hilbertin hotelli – Herra Hilbertillä on isommanpuoleinen hotelli, jossa on peräti äärettömästi huoneita. Huoneet on onneksi numeroitu tuttuun tyyliin luonnollisilla luvuilla

$$1, 2, 3, 4, 5, \ldots, 235346, 23547, 23548, \ldots.$$

Koska matkailu on muodissa, on herra Hilbertin hotelli tällä hetkellä täyteen buukattu. Mutta...

(a) Hotellin aulaan saapuu herra Nolla, joka pyytää huonetta. Miten herra Hilbert saa hänet majoitettua?

(b) Naapurihotellissa (joka on identtinen Hilbertin hotellin kanssa) tapahtuu vedenpaisumus, joten sen äärettömän monta asiakasta saapuvat herra Hilbertin hotellin ovelle. Miten herra Hilbert saa heidät majoitettua?

(c) Lähistöllä on alkamassa kiinnostava konferenssi, ja pihaan ajaa ääretön määrä busseja, jotka on rekisterikilvissä numeroitu luvuilla

$$1, 2, 3, 4, 5, \ldots, 23\ 546, 23\ 547, 23\ 548, \ldots.$$

Kussakin bussissa on numeroituvan äärettömästi matkustajia. Miten herra Hilbert majoittaa heidät kaikki jo täynnä olevaan hotelliinsa?

(d) Herra Hilbertiä kiinnostaa, miten monella eri tavalla hänen hotellinsa huoneet voisivat olla varattuina. Hän ei kuitenkaan jaksa kirjoittaa äärettömän monta lappua, joten hän päättää pyytää, että jokainen hotellin asukas kirjoittaa hänelle yhden ”varausskenaarion”, eli tavan millä huoneet voisivat olla vapaina tai varattuina. Jotta kaikki tapahtuisi kontrolloidusti, kirjoitetaan nämä varausskenaariot paperille jonona ykkösiä ja nollia, jossa n:s ykkönen tai nolla kertoo, onko huone numero n varattu (1) vai vapaa (0). Voiko näin tulla kirjoitetuksi kaikki mahdolliset tavat varata huoneita?

Huomioita

Tehtävä on klassinen esimerkki äärettömyyden käsitteestä.

(a) Laittamalla Herra Nolla ensimmäiseen huoneeseen ja siirtämällä huoneen n asukas huoneeseen $n + 1$, missä $n \in \mathbb{N}$ asia on kunnossa.

(b) Jos turisteja olisi äärellinen määrä, voitaisiin edellisen kohdan menetelmää soveltaa monta kertaa peräkkäin. Turisteja on kuitenkin ääretön määrä. Tilanne ratkeaa, jos huoneen n asukas siirretään huoneeseen $2n$, missä $n \in \mathbb{N}$. Tällöin saadaan kaikki parittomat huoneet vapaiksi, joita on tietysti ääretön määrä.

(c) Merkitään Hilbertin hotellia luvulla 0. Nyt jokainen hotellin ja bussien turisti voidaan merkitä lukuparilla (a, b). Esimerkiksi huoneen numero kahdeksan asukas on lukupari $(0, 8)$, ja bussin numero 78 kolmas asiakas lukupari $(78, 3)$. Nyt kaikki turistit voidaan sijoittaa Hilbertin hotelliin seuraavassa järjestyksessä:

$$
\begin{aligned}
&(0,1)\\
&(0,2),(1,1)\\
&(0,3),(1,2),(2,1)\\
&(0,4),(1,3),(2,2),(3,1)\\
&(0,5),(1,4),(2,3),(3,2),(4,1)\\
&(0,6),(1,5),(2,4),(3,3),(4,2),(5,1)\\
&\dots
\end{aligned}
$$

(d) Tämä liittyy ns. Cantorin diagonaaliargumenttiin reaalilukujen ylinumeroituvuuden osoittamisessa. (Googlaa "Cantorin diagonaaliargumentti" tai "Cantor's diagonal argument".) Englanninkielisessä Wikipedia-artikkelissa argumenttia tarkastellaan kuten tässä tehtävässä - vain ykkösten ja nollien tapauksessa. Jos jo lukujen yksi ja nolla avulla muodostettujen reaalilukujen joukko on ylinumeroituva, välttämättä myös koko reaalilukujen joukko on ylinumeroituva. Tutkimme tätä todennäköisesti jo luennolla.

Tehtävä

(4) Perinteinen matematiikan laitoksen fuksikysymys: Pitääkö yhtälö

$$0,99999999999999\ldots = 1$$

paikkansa?

Huomioita Yhtälön voi osoittaa todeksi seuraavan päättelyn avulla. Merkitään

$$x = 0,999\ldots =: 0,\overline{9}.$$

Tämän voi kirjoittaa rationaalilukuna seuraavasti.

$$
\begin{aligned}
x &= 0,9999999\ldots\\
\Leftrightarrow 10x &= 9,999999\ldots\\
\Leftrightarrow 10x - x &= 9\\
\Leftrightarrow 9x &= 9\\
\Leftrightarrow x &= \frac{9}{9} = 1.
\end{aligned}
$$

Vastaava menetelmä soveltuu kaikille desimaaliluvuille, joilla on toistuva desimaalikehitelmä. Sen avulla on helppo etsiä tällaisille desimaaliluvuille niiden murtolukuesitys.

(a) Ensin helppo esimerkki. Merkitään

$$x = 0,12121212\ldots =: 0,\overline{12}.$$

Tämän voi kirjoittaa rationaalilukuna seuraavasti.

$$\begin{aligned} x &= 0,1212121212\ldots \\ \Leftrightarrow 100x &= 12,1212121212\ldots \\ \Leftrightarrow 100x - x &= 12 \\ \Leftrightarrow 99x &= 12 \\ \Leftrightarrow x &= \frac{12}{99}. \end{aligned}$$

(b) Sitten vähän haastavampi esimerkki. Merkitään

$$x = 4,118538538538853\ldots =: 4,11\overline{853}.$$

Tämän voi kirjoittaa rationaalilukuna seuraavasti. Huomataan ensin, että

$$x = 4,11 + 0,00\overline{853} = \frac{411}{100} + 0,00\overline{853},$$

eli hankala osa on vain tuo toistuvan desimaalikehitelmän kohta. Merkitään $y = 0,\overline{853}$, ja huomataan että

$$\begin{aligned} y &= 0,853853853853\ldots \\ \Leftrightarrow 1000y &= 853,853853853\ldots \\ \Leftrightarrow 1000y - y &= 853 \\ \Leftrightarrow 999y &= 853 \\ \Leftrightarrow y &= \frac{853}{999}. \end{aligned}$$

Täten siis

$$4,118538538538853\ldots = \frac{411}{100} + 0,001 \cdot y = \frac{411}{100} + \frac{853}{999000}.$$

Tämän tehtävän yhteydessä saa puhua valinta-aksioomasta, matematiikan aksiomaattisesta luonteesta yleisemminkin, infinitesimaaleista, epästandardista analyysistä jne.

Tehtävä

(5) Pelatkaa Pilvenpiirtäjät-peliä. Peli muistuttaa logiikaltaan Sudokua. Pelissä on neljä erikorkuista pilvenpiirtäjää, ja pelialue tulee täyttää siten, että jokaiselta pysty- ja vaakariviltä löytyy kaikki neljä rakennusta. Ruudukon reunalla on luku, joka kertoo, kuinka monta pilvenpiirtäjää ko. suunnasta voi nähdä. Lyhyempiä pilvenpiirtäjiä ei voi nähdä korkeampien pilvenpiirtäjien takaa. Usein reaalimaailmasta poiketen, jokaisella tehtävällä on vain yksi ratkaisu.

Huomioita

Materiaali löytyy Summamutikka-keskuksen materiaalipankista hakusanalla ”Pilvenpiirtäjät”. Tehtävän yhteydessä voi lisäksi puhua esimerkiksi inversio-ongelmista mm. lääketieteellisessä kuvantamisessa.