

Matematiikkaa kaikille

Syksy 2016

Pienryhmätehtävät 2

(1) Tutkitaan fraktaaleja! Ohjeet tulevat taululle.

(2) Tutustu graafisesti summaan

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \dots$$

Miltä sarjan summa vaikuttaa? (Vinkki: piirrä suorakulmio, ja piirrä tai leikkaa siitä osia.)

(3) Valitse jokin vakio $0 < c < 1$ ja tutki sarjan

$$1 \cdot c + 1 \cdot c^2 + 1 \cdot c^3 + \dots$$

summaa. Mieti taas geometrisesti, eli leikkaa tai piirrä suorakulmiosta osia. (Edellisessä tehtävässä $c = \frac{1}{2}$.)

(4) Luvun x neliö tarkoittaa lukua x^2 , kun taas luvun x kuutio tarkoittaa lukua x^3 . Olkoon n jokin luonnollinen luku. Osoita graafisesti, että

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = (1 + 2 + 3 + \dots + n)^2.$$

Ruutupaperin käyttäminen voi olla hyödyllistä.

(5) Herra Thompsonilla on lamppu, jossa on on-off -kytkin. Hän kääntää lampun ensin päälle ja...

- odottaa sitten minuutin ja painaa kytkintä
- odottaa sitten 30 sekuntia ja painaa kytkintä
- odottaa sitten 15 sekuntia ja painaa kytkintä
- odottaa sitten 7,5 sekuntia ja painaa kytkintä
- odottaa sitten 3,75 sekuntia ja painaa kytkintä
- odottaa sitten 1,875 sekuntia ja painaa kytkintä
- ...
- odottaa puolet aikaisemmasta odotusajasta ja painaa kytkintä
- ...

Luennon perusteella tiedetään, että kahden minuutin kuluttua homma on valmis. Onko lamppu silloin päällä vai ei? Entä jos herra Thompson aloittaa lampun ollessa pois päältä?