Matematiikkaa kaikille
Syksy 2016
Pienryhmätehtävät 2 - **Ohjaajille**

Tehtävä

(1) Tutkitaan fraktaaleja! Ohjeet tulevat taululle.

Huomioita

Oheet (seuraavalla sivulla) kannattaa antaa yhteisesti kaikille tunnin alussa. Huomaa, että skaalauskerrointa voi myös muuttaa. Otetaan esimerkiksi neliö. Jos skaalauskertoimena on $1/3$, jäljelle jäävän palan osuus alkuperäisestä on

$$\frac{1}{9} = \left(\frac{1}{3}\right)^2.$$

Neliön dimensio on siis edelleen kaksi. Tehtäväosuutta varten varmista, että osaat muodostaa Cantorin joukon, Sierpinskin maton ja Mengerin pesusienen. Näiden olioiden tapauksessa skaalauskertoimena kannattaa käyttää lukua $1/3$.

Ohjeesta unohtui eräs kiva fraktaali, Kochin lumihiutaleen reuna. Sitäkin kannattaa ehdottomasti tutkia! Tätä varten kannattaa ottaa tarkasteluun vain yksi ensimmäisen iteraation (kolmio) sivuista. Tässä skaalauskertoimella $1/3$ saadaan dimensioksi d jotain, joka toteuttaa seuraavan yhtälön:

$$\frac{1}{4} = \left(\frac{1}{3}\right)^d.$$

Lista fraktaaleista niiden Hausdorff-dimension mukaan löytyy seuraavasta osoitteesta `https://en.wikipedia.org/wiki/List_of_fractals_by_Hausdorff_dimension` tai Wikipediasta hakusanalla "List of fractals by Hausdorff dimension".

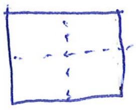
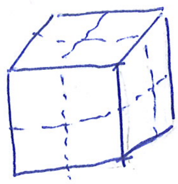
Yleisesti fraktaalit ovat itsesimilaareja joukkoja, jotka näyttävät samankaltaiselta, vaikka sitä katsoisi miten läheltä tahansa. Video zoomauksesta Mandelbrotin joukkoon löytyy osoitteesta `https://www.youtube.com/watch?v=PD2XgQOyCCk` ja Youtubesta hakusanalla "Mandelbrot zoom 10^227".

Mandelbrotin joukko on kompleksitason joukko, joka voidaan iteroida tutkimalla yhtälöä $x_{n+1} = x_n^2 + c$, missä x ja c ovat kompleksilukuja. Asetetaan $x_0 = (0, 0)$, valitaan piste c ja tutkitaan jonoa $(x_0, x_1, x_2, x_3, \ldots)$. Piste c kuuluu Mandelbrotin joukkoon, jos $|x_n|$ on rajoitettu kun $n \to \infty$. Mandelbrotin joukko on erinomainen esimerkki siitä, miten suhteellisen yksinkertaista sääntöä noudattamalla saadaan muodostettua monimutkainen, visuaalisesti hieno olio.

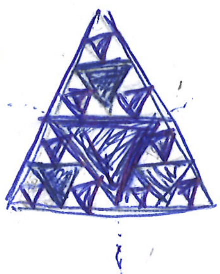
TUTKITAAN FRAKTAALEJA!

INTRO

Dimension käsitettä voidaan lähestyä seuraavasti:

		skaalaus-kerroin	osuus alkup.	dimensio
PISTE	•	1/2	$1 = \left(\frac{1}{2}\right)^0$	0
SUORA		1/2	$\frac{1}{2} = \left(\frac{1}{2}\right)^1$	1
NELIÖ		1/2	$\frac{1}{4} = \left(\frac{1}{2}\right)^2$	2 "pinta-alaa"
KUUTIO		1/2	$\frac{1}{8} = \left(\frac{1}{2}\right)^3$	3 "tilavuutta"

Mutta...

SIERPINSKIN KOLMIO		1/2	$\frac{1}{3} = \left(\frac{1}{2}\right)^a$	$1 < a < 2$ ($a = 1{,}5849$)

Sierpinskin kolmio on siis suora, jolla on melkein pinta-alaa.

TEHTÄVÄ

Tutki vastaavasti Cantorin joukkoa, Sierpinskin mattoa ja Mengerin pesusientä.

Tehtävä

(2) Tutustu graafisesti summaan

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\cdots.$$

Miltä sarjan summa vaikuttaa? (Vinkki: piirrä suorakulmio, ja piirrä tai leikkaa siitä osia.)

Huomioita

Tehtävän ideana on huomata, että vaikka summataan ääretön määrä positiivisia lukuja keskenään, saadan aikaiseksi vain jotain äärellistä. Tässä tapauksessa sarjan summa on 1.

Tehtävä

(3) Valitse jokin vakio $0 < c < 1$ ja tutki sarjan

$$1\cdot c + 1\cdot c^2 + 1\cdot c^3 + \cdots$$

summaa. Mieti taas geometrisesti, eli leikkaa tai piirrä suorakulmiosta osia. (Edellisessä tehtävässä $c = \frac{1}{2}$.)

Huomioita

Tehtävä on jatkoa edelliseen tehtävään. Tällä kertaa mietitään kertoimen vaikutusta sarjan summaan. Jos ja kun opiskelijat valitsevat erilaisia kertoimia c, voi sarjan summan tarkastaa vaikkapa syöttämällä Wolfram Alphaan (`https://www.wolframalpha.com/`) komennon `\sum_{n=1}^\infty\left(\frac{1}{2}\right)^n` . (Tämä komento on tehty kertoimelle $c = 1/2$. Muille kertoimille vaihda komennossa näkyvän luvun 2 tilalle kerrointa vastaava luku.)

Tehtävä

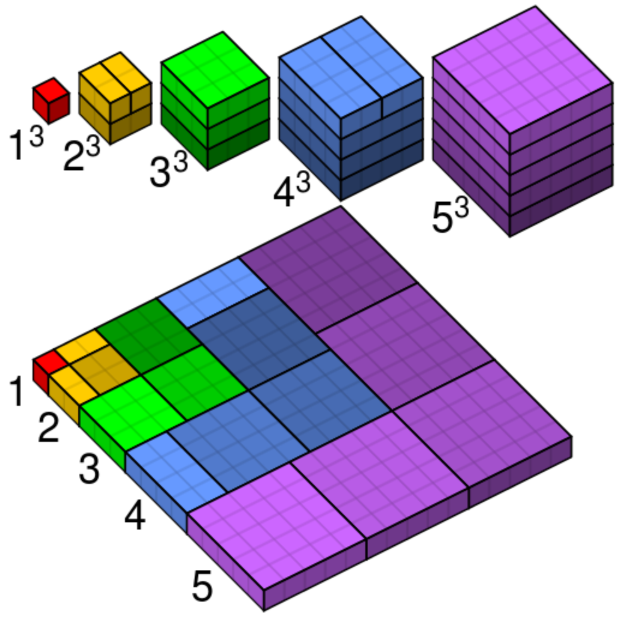
(4) Luvun x neliö tarkoittaa lukua x^2, kun taas luvun x kuutio tarkoittaa lukua x^3. Olkoon n jokin luonnollinen luku. Osoita graafisesti, että

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3 = (1 + 2 + 3 + \ldots + n)^2.$$

Ruutupaperin käyttäminen voi olla hyödyllistä.

Huomioita

Tehtävää kannattaa aluksi kokeilla pienillä n:n arvoilla. Halukkaat voivat todistaa tehtävän myös formaalisti induktiolla. Lisätietoja löytyy Wikipediasta hakusanoilla ”kolmioluku” ja erityisesti ”Squared triangular number”.



Tehtävä

(5) Herra Thompsonilla on lamppu, jossa on on-off -kytkin. Hän kääntää lampun ensin päälle ja...

- odottaa sitten minuutin ja painaa kytkintä
- odottaa sitten 30 sekuntia ja painaa kytkintä
- odottaa sitten 15 sekuntia ja painaa kytkintä
- odottaa sitten 7,5 sekuntia ja painaa kytkintä
- odottaa sitten 3,75 sekuntia ja painaa kytkintä
- odottaa sitten 1,875 sekuntia ja painaa kytkintä
- ...
- odottaa puolet aikaisemmasta odotusajasta ja painaa kytkintä
- ...

Luennon perusteella tiedetään, että kahden minuutin kuluttua homma on valmis. Onko lamppu silloin päällä vai ei? Entä jos herra Thompson aloittaa lampun ollessa pois päältä?

Huomioita

Tehtävää ei voi ratkaista. Tämä johtuu siitä, ettei aikaa voi jakaa äärettömän pieniin osiin. Tehtävänantoa voi ajatella myös siten, että etsitään alternoivalle sarjalle $1-1+1-1+1-1+1-1+\ldots$ raja-arvoa (jota ei ole olemassa).