Modaalilogiikka

Taneli Huuskonen

17. syyskuuta 2015

3 Looginen ekvivalenttisuus

Määritelmä 3.1. Olkoot $\mathcal{F}$ kaikkien K-kehysten luokan osaluokka, $\mathcal{M}$ kaikkien K-mallien luokan osaluokka, $M = \langle W, R, P \rangle$ K-malli sekä A ja B kaavoja.

1. Kaavat A ja B ovat *loogisesti ekvivalentit mallissa* M (lyhyesti $A \equiv_M B$), joss $M \models A \leftrightarrow B$.

2. Kaavat A ja B ovat *loogisesti ekvivalentit kehyksessä* $\langle W, R \rangle$ ($A \equiv_{\langle W,R \rangle} B$), joss $\langle W, R \rangle \models A \leftrightarrow B$.

3. Kaavat A ja B ovat *loogisesti ekvivalentit malliluokassa* $\mathcal{M}$ ($A \equiv_{\mathcal{M}} B$), joss $\mathcal{M} \models A \leftrightarrow B$.

4. Kaavat A ja B ovat *loogisesti ekvivalentit kehysluokassa* $\mathcal{F}$ ($A \equiv_{\mathcal{F}} B$), joss $\mathcal{F} \models A \leftrightarrow B$.

5. Kaavat A ja B ovat *loogisesti K-ekvivalentit* ($A \equiv_K B$), joss $\models_K A \leftrightarrow B$.

Kaavojen A ja B looginen ekvivalenttisuus merkitsee siis kaavan $A \leftrightarrow B$ validisuutta, josta on samat versiot kuin validisuudesta yleensä.

Huomautus 3.2. Kaikki esitetyt validisuuden versiot voidaan tulkita validisuudeksi malliluokassa. Validisuus yksittäisessä mallissa M on sama kuin validisuus yksialkioisessa malliluokassa $\{M\}$[1]. Validisuus kehyksessä $\langle W, R \rangle$ on sama kuin validisuus niiden mallien $\langle W', R', P' \rangle$ luokassa, joilla $W' = W$ ja $R' = R$. Validisuus kehysluokassa $\mathcal{F}$ merkitsee validisuutta niiden mallien $\langle W, R, P \rangle$ luokassa, joilla $\langle W, R \rangle \in \mathcal{F}$.

[1] Muistetaan, että jokainen joukko on luokka.

Seuraavia lauseita voidaan siis soveltaa kaikkiin edellä määriteltyihin validisuuden versioihin.

Lause 3.3. *Olkoon $\mathcal{M}$ malliluokka. Tällöin looginen ekvivalenttisuus luokassa $\mathcal{M}$ on kaavojen joukon ekvivalenssirelaatio.*

Todistus. Harjoitustehtävä. $\square$

Lause 3.4. *Olkoon $\mathcal{M}$ malliluokka. Olkoot D ja E luokassa $\mathcal{M}$ loogisesti ekvivalentit kaavat, A kaava ja p propositiosymboli. Tällöin kaavat $A[p/D]$ ja $A[p/E]$ ovat keskenään loogisesti ekvivalentit luokassa $\mathcal{M}$.*

Todistus. Induktio kaavan A rakenteen suhteen. $\square$

4 Formaalit todistukset

Esimerkissä 2.22 todistettiin kaava $\Box(p_1 \to (p_1 \vee \Diamond p_2))$ K-validiksi soveltamalla lauseita 2.14, 2.19 ja 2.21. Samanlaisella menetelmällä voidaan muodostaa validisuustodistuksia, joissa kussakin vaiheessa todistetaan yksi kaava validiksi joko suoraan kaavan yleisen muodon perusteella (esim. soveltamalla lausetta 2.14 tai 2.15) tai toteamalla, että kaikki validisuuden säilyttävän päättelysäännön oletukset on jo edellä osoitettu valideiksi, jolloin johtopäätöskin on validi lauseen 2.19 mukaan.

Määritelmä 4.1. *Aksioomasysteemi* on pari $\mathcal{S} = \langle \mathcal{A}, \mathcal{Q} \rangle$, missä $\mathcal{A}$ on joukko kaavoja (systeemin $\mathcal{S}$ *aksioomat*) ja $\mathcal{Q}$ on joukko päättelysääntöjä (systeemin $\mathcal{S}$ *säännöt*). Aksioomasysteemi $\langle \mathcal{A}, \mathcal{Q} \rangle$ on *homogeeninen,* joss seuraavat ehdot ovat voimassa:

1. Kaikilla kaavoilla $A \in \mathcal{A}$, kaikilla propositiosymboleilla p ja kaikilla kaavoilla B on voimassa $A[p/B] \in \mathcal{A}$.
2. Kaikilla säännöillä $\mathcal{R} \in \mathcal{Q}$, kaikilla propositiosymboleilla p ja kaikilla kaavoilla B on voimassa $\mathcal{R}[p/B] \in \mathcal{Q}$.

Määritelmä 4.2. Olkoon $\mathcal{S} = \langle \mathcal{A}, \mathcal{Q} \rangle$ aksioomasysteemi. *Formaali todistus systeemissä* $\mathcal{S}$ on sellainen kaavajono $\langle A_1, \ldots, A_k \rangle$, että jokaisella $i \in \{1, \ldots, k\}$ ainakin toinen seuraavista ehdoista on voimassa:

1. $A_i \in \mathcal{A}$,
2. On olemassa sellainen sääntö $\langle \mathcal{B}, C \rangle \in \mathcal{Q}$, että $\mathcal{B} \subseteq \{A_1, \ldots, A_{i-1}\}$ ja $A_i = C$.

Määritelmä 4.3. Kaava A on *todistuva* aksioomasysteemissä $\mathcal{S}$ (eli *pääteltävissä* aksioomasysteemissä $\mathcal{S}$ eli aksioomasysteemin $\mathcal{S}$ *teoreema*), joss on olemassa sellainen formaali todistus $\langle A_1, \ldots, A_k \rangle$ systeemissä $\mathcal{S}$, että $A = A_k$. Tätä merkitään lyhyesti $\vdash_{\mathcal{S}} A$.

Huomaa, että jokainen systeemin $\mathcal{S}$ aksiooma on triviaalisti systeemin $\mathcal{S}$ teoreema. Lisäksi on voimassa samankaltainen ominaisuus systeemin $\mathcal{S}$ säännöille.

Määritelmä 4.4. Olkoon Σ joukko modaalilogiikan kaavoja, ja olkoon $\mathcal{Q}$ joukko päättelysääntöjä. Joukko Σ on *sulkeinen* sääntöjoukon $\mathcal{Q}$ suhteen, joss kaikilla niillä säännöillä $\langle \mathcal{B}, C \rangle \in \mathcal{Q}$, joilla $\mathcal{B} \subseteq \Sigma$, pätee $C \in \Sigma$.

Lause 4.5. *Aksioomasysteemin $\mathcal{S} = \langle \mathcal{A}, \mathcal{Q} \rangle$ teoreemojen joukko on sulkeinen sääntöjoukon $\mathcal{Q}$ suhteen.*

Todistus. Olkoon Σ systeemin $\mathcal{S}$ teoreemojen joukko. Olkoon $\mathcal{R} = \langle \{B_1, \ldots, B_n\}, C \rangle \in \mathcal{Q}$ sellainen sääntö, että $\{B_1, \ldots, B_n\} \subseteq \Sigma$. Tällöin jokaisella $i \in \{1, \ldots, n\}$ kaavalla B_i on systeemissä $\mathcal{S}$ todistus $\langle B_i^1, \ldots, B_i^{k_i} \rangle$. Asetetaan

$$\bar{D} = \langle B_1^1, \ldots, B_1^{k_1}, B_2^1, \ldots, B_2^{k_2}, \ldots, B_n^1, \ldots, B_n^{k_n}, C \rangle.$$

Nyt jokainen kaava B_i^j on joko aksiooma tai voidaan johtaa jollakin systeemin $\mathcal{S}$ säännöllä kaavoista $B_i^1, \ldots, B_i^{j-1}$. Lisäksi C voidaan johtaa kaavoista $B_1 = B_1^{k_1}, \ldots, B_n = B_n^{k_n}$ säännöllä $\mathcal{R}$. Niinpä $\bar{D}$ on kaavan C todistus systeemissä $\mathcal{S}$, joten $C \in \Sigma$. $\square$

Lemma 4.6. *Olkoon $\mathcal{S} = \langle \mathcal{A}, \mathcal{Q} \rangle$ homogeeninen aksioomasysteemi, ja olkoon $\langle A_1, \ldots, A_k \rangle$ todistus systeemissä $\mathcal{S}$. Olkoot edelleen p propositiosymboli ja B kaava. Tällöin $\langle A_1[p/B], \ldots, A_k[p/B] \rangle$ on todistus systeemissä $\mathcal{S}$.*

Todistus. Harjoitustehtävä. $\square$

Lause 4.7. *Olkoot A homogeenisen aksioomasysteemin $\mathcal{S} = \langle \mathcal{A}, \mathcal{Q} \rangle$ teoreema, p propositiosymboli ja B kaava. Tällöin $A[p/B]$ on systeemin $\mathcal{S}$ teoreema.*

Todistus. Olkoon $\langle A_1, \ldots, A_k \rangle$ kaavan A todistus systeemissä $\mathcal{S}$. Tällöin lemman 4.6 nojalla $\langle A_1[p/B], \ldots, A_k[p/B] \rangle$ on kaavan $A[p/B]$ todistus systeemissä $\mathcal{S}$. $\square$

Määritelmä 4.8. Aksioomasysteemi $\langle \mathcal{A}, \mathcal{Q} \rangle$ on *K-validi*, joss jokainen sen aksiooma on K-validi ja jokainen sen sääntö säilyttää validisuuden.

Lause 4.9. *Jokainen K-validin aksioomasysteemin teoreema on K-validi.*

Todistus. Olkoot $\mathcal{S} = \langle \mathcal{A}, \mathcal{Q} \rangle$ K-validi aksioomasysteemi ja A sen teoreema. Olkoon $\langle A_1, \ldots, A_k \rangle$ kaavan A todistus systeemissä $\mathcal{S}$. Todistetaan induktiolla, että A_i on K-validi kaikilla $i \in \{1, \ldots, k\}$, jolloin erityisesti $A = A_k$ on K-validi. Täsmällisemmin induktiolla todistettava väite muotoillaan seuraavasti:

> Kaikille luonnollisille luvuille $i \leq k$ pätee, että kaikilla $j \in \{1, \ldots, k\}$, joilla $j \leq i$, kaava A_j on K-validi.

Perustapaus $i = 0$ on triviaalisti tosi. Oletetaan sitten, että väite pätee luvulle $i < k$. Olkoon $j \in \{1, \ldots, k\}$, $j \leq i+1$. Jos $j \leq i$, niin väite seuraa suoraan induktio-oletuksesta. Tarkastellaan siis tapausta $j = i + 1$. Jos $A_j \in \mathcal{A}$, niin A_j on K-validi, koska oletuksen mukaan $\mathcal{S}$ on K-validi. Muussa tapauksessa on jokin sellainen päättelysääntö $\mathcal{R} = \langle \mathcal{B}, C \rangle \in \mathcal{Q}$, että $\mathcal{B} \subseteq \{A_1, \ldots, A_i\}$ ja $C = A_{i+1}$. Induktio-oletuksen nojalla kaikki säännön $\mathcal{R}$ oletukset ovat K-valideja. Lisäksi $\mathcal{R}$ säilyttää validisuuden, joten myös johtopäätös $C = A_{i+1}$ on K-validi. $\square$

Tarkastellaan seuraavaksi lauseen 2.23 todistusta. Siinä lähdetään oletuksesta, että kaava $A \to B$ on validi mallissa M, ja sovelletaan tämän jälkeen samanlaisia päättelyaskelia kuin esimerkissä 2.22. Kaikki loput todistuksessa esiintyvät kaavat ovat joko K-valideja tai saadaan aikaisemmista kaavoista validisuuden säilyttävillä päättelysäännöillä. Tästä voitiin päätellä, että kaikki välivaiheina esiintyvät kaavat ovat valideja mallissa M. Erityisesti viimeinen kaava $\Box A \to \Box B$ on validi mallissa M. Niinpä sääntö RM säilyttää validisuuden, koska M oli mielivaltainen sellainen malli, että $M \models A \to B$. Tämän todistusmenetelmän voi formalisoida seuraavasti.

Määritelmä 4.10. Olkoon $\mathcal{S} = \langle \mathcal{A}, \mathcal{Q} \rangle$ aksioomasysteemi. Päättelysääntö

$$\frac{C_1 \quad C_2 \quad \ldots C_n}{D}$$

on *johdettavissa systeemissä* $\mathcal{S}$, joss D on systeemin $\langle \mathcal{A} \cup \{C_1, \ldots, C_n\}, \mathcal{Q} \rangle$ teoreema.

Lause 4.11. *Päättelysääntö, joka on johdettavissa K-validissa aksioomasysteemissä, säilyttää validisuuden.*

Todistus. Olkoot $\mathcal{S} = \langle \mathcal{A}, \mathcal{Q} \rangle$ K-validi aksioomasysteemi sekä

$$\frac{C_1 \quad C_2 \quad \ldots C_n}{D}$$

päättelysääntö, joka on johdettavissa systeemissä $\mathcal{S}$. Merkitään $\mathcal{S}' = \langle \mathcal{A} \cup \{C_1, \ldots, C_n\}, \mathcal{Q} \rangle$. Olkoon $\langle A_1, \ldots, A_k \rangle$ kaavan D todistus systeemissä $\mathcal{S}'$.

Olkoon M K-malli, jossa oletukset $C_1, \ldots, C_n$ ovat valideja. Tällöin kaikki systeemin $\mathcal{S}'$ aksioomat ovat valideja mallissa M. Samoin kuin edellä lauseen 4.9 todistuksessa, voidaan osoittaa induktiolla, että kaikki kaavat A_i, missä $i \in \{1, \ldots, k\}$, ovat valideja mallissa M. Erityisesti $M \models D$. $\square$