Modaalilogiikka

Taneli Huuskonen

23. syyskuuta 2015

2 Perusmääritelmät

Otetaan $p_1, p_2, \ldots$ "virallisiksi" propositiosymboleiksi. Merkitään näiden joukkoa symbolilla $\mathbb{V}$, siis $\mathbb{V} = \{p_1, p_2, p_3, \ldots\}$.

Määritelmä 2.1. *Modaalisen propositiologiikan kaavojen* (eli lyhyesti vain *kaavojen*) joukko on suppein joukko F, joka toteuttaa seuraavat ehdot:

1. $\mathbb{V} \subseteq F$.
2. Jos A kuuluu joukkoon F, niin myös $\neg A$ ja $\Box A$ kuuluvat joukkoon F.
3. Jos A ja B kuuluvat joukkoon F, niin myös $(A \wedge B)$ kuuluu joukkoon F.

Otetaan käyttöön seuraavat lyhennysmerkinnät, missä A ja B ovat kaavoja:

$$\begin{aligned}
A \vee B &:= \neg(\neg A \wedge \neg B) \\
A \to B &:= \neg A \vee B \\
A \leftrightarrow B &:= (A \to B) \wedge (B \to A) \\
\Diamond A &:= \neg \Box \neg A
\end{aligned}$$

Määritelmä 2.2. *Kripke-malli* (lyhyesti *K-malli*) on kolmikko $\langle W, R, P \rangle$, missä W on epätyhjä joukko, R on joukon W kaksipaikkainen relaatio ja P on funktio joukolta $\mathbb{V}$ joukkoon $\mathcal{P}(W)$.

Relaatio R ilmaisee saavutettavuuden: wRw' (eli $\langle w, w' \rangle \in R$) tarkoittaa, että w' on saavutettavissa maailmasta w.

Kaavan totuus K-mallissa määritellään rekursiivisesti.

Määritelmä 2.3. Olkoot $M = \langle W, R, P\rangle$ K-malli, A kaava ja $w \in W$. Kaava A on *tosi* mallin M maailmassa w, lyhyesti $M, w \models A$, joss jokin seuraavista ehdoista on voimassa:

1. A on propositiosymboli ja $w \in P(A)$.
2. $A = \neg B$ jollakin kaavalla B, jolle pätee $M, w \not\models B$.
3. $A = (B \wedge C)$ joillakin kaavoilla B, C, joille pätee $M, w \models B$ ja $M, w \models C$.
4. $A = \Box B$ jollakin sellaisella kaavalla B, että jokaiselle $w' \in W$, jolle on voimassa $w\,R\,w'$, pätee $M, w' \models B$.

Suoraan tästä määritelmästä saadaan seuraavat ehdot lyhennysmerkintöjä käyttävien kaavojen $A \vee B$, $A \to B$, $A \leftrightarrow B$ ja $\Box A$ totuudelle:

1. $M, w \models A \vee B$, joss $M, w \models A$ tai $M, w \models B$.
2. $M, w \models A \to B$, joss $M, w \not\models A$ tai $M, w \models B$.
3. $M, w \models A \leftrightarrow B$, joss joko $M, w \models A$ ja $M, w \models B$ tai $M, w \not\models A$ ja $M, w \not\models B$.
4. $M, w \models \Diamond A$, joss jollakin $w' \in W$ pätee $w\,R\,w'$ ja $M, w' \models A$.

Esimerkki 2.4. Olkoot

$$\begin{aligned} W &= \{0, 1, 2\}, \\ R &= \{(0,0), (0,1), (0,2), (1,1), (1,2), (2,1), (2,2)\}, \\ P(p_i) &= \begin{cases} \{0,1\}, & \text{jos } i = 1, \\ \{1,2\}, & \text{jos } i = 2, \\ \emptyset, & \text{muuten,} \end{cases} \end{aligned}$$

ja olkoon $M = \langle W, R, P\rangle$.

Tutkitaan kaavan $A = p_1 \wedge \Box\, p_2$ totuutta mallin M maailmoissa. Kaava p_2 on tosi maailmoissa 1 ja 2 mutta ei maailmassa 0, koska $P(p_2) = \{1, 2\}$. Lisäksi $0\,R\,0$ mutta $1 \not R\, 0$ ja $2 \not R\, 0$, joten $\Box\, p_2$ on tosi maailmoissa 1 ja 2 mutta ei maailmassa 0. Toisaalta p_1 on tosi maailmoissa 0 ja 1 mutta ei maailmassa 2, koska $P(p_1) = \{0, 1\}$. Niinpä $M, w \models A$ silloin ja vain silloin, kun $w = 1$.

Esimerkki 2.5. Olkoot

$$\begin{array}{rcl} W & = & \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}, \\ R & = & \{(0,1),(0,2),(0,3),(1,4),(1,5),(2,6),(2,7),(2,8),(3,9),(3,10)\}, \\ P(p_i) & = & \begin{cases} \{1,4,5\}, & \text{jos } i=1, \\ \{2,6,7,8\}, & \text{jos } i=2, \\ \{3,9,10\}, & \text{jos } i=3, \\ \{4,5,7\}, & \text{jos } i=4, \\ \{5,6,7,8,10\}, & \text{jos } i=5, \\ \{8,9,10\}, & \text{jos } i=6, \\ \emptyset, & \text{muuten.} \end{cases} \end{array}$$

Nyt on helppoa mutta hiukan työlästä tarkistaa, että malli $M = \langle W, R, P\rangle$ kuvaa johdantokappaleessa esitettyä poliittista esimerkkiä, jossa hallituskokoonpanon mahdollisuuksia tarkastellaan pääministerin valinnasta riippuvina. Propositiosymbolit $p_1, \ldots, p_6$ vastaavat järjestyksessä johdannon propositiosymboleja p_V, p_P, p_R, h_V, h_P ja h_R. Maailma 0 on lähtötilanne ennen vaaleja, maailmat 1–3 vastaavat mahdollisia pääministerivalintoja, ja loput maailmat esittävät mahdollisia hallituskokoonpanoja taulukon oikean sarakkeen mukaisessa järjestyksessä.

Tutkitaan kaavan $\Diamond\Box p_6$ totuutta mallin M maailmassa 0. Kaava p_6 on tosi erityisesti maailmoissa 9 ja 10, jotka ovat ainoat, joiden kanssa maailma 3 on relaatiossa R (siis $3\,R\,w$, joss $w = 9$ tai $w = 10$). Niinpä $M, 3 \models \Box p_6$. Lisäksi $0\,R\,3$, joten $M, 0 \models \Diamond\Box p_6$.

Yksittäisessä maailmassa propositiologiikan kaavojen totuudet käyttäytyvät täsmälleen samoin kuin klassisessa propositiologiikassa, minkä voi muotoilla täsmällisesti seuraavaksi lauseeksi.

Lause 2.6. *Olkoon $M = \langle W, R, P\rangle$ K-malli, ja olkoon $w \in W$. Olkoon v seuraavasti määritelty propositiologiikan totuusjakauma:*

$$v(p_i) = \begin{cases} t, & \textit{jos } w \in P(p_i), \\ e, & \textit{muuten.} \end{cases}$$

Tällöin jokaiselle propositiologiikan kaavalle A pätee

$$v(A) = \begin{cases} t, & \textit{jos } M, w \models A, \\ e, & \textit{muuten.} \end{cases}$$

Määritelmä 2.7. Olkoon $M = \langle W, R, P \rangle$ K-malli, ja olkoon A kaava. Kaavan A *totuusjoukko mallissa* M (lyhyesti $\|A\|^M$) on niiden mallin M maailmojen joukko, joissa A on tosi:

$$\|A\|^M = \{w \in W \mid M, w \models A\}.$$

Määritelmä 2.8. *Kripke-kehys* (K*-kehys*) on pari $\langle W, R \rangle$, missä W ja R ovat kuten Kripke-mallin määritelmässä.

Määritelmä 2.9. Olkoot $\mathcal{F}$ kaikkien K-kehysten luokan osaluokka[1], $\mathcal{M}$ kaikkien K-mallien luokan osaluokka, $M = \langle W, R, P \rangle$ K-malli sekä A kaava.

1. Kaava A on *validi mallissa* M (lyhyesti $M \models A$), joss $\|A\|^M = W$.

2. Kaava A on *validi kehyksessä* $\langle W, R \rangle$ ($\langle W, R \rangle \models A$), joss A on validi jokaisessa mallissa $\langle W, R, P' \rangle$.

3. Kaava A on *validi malliluokassa* $\mathcal{M}$ ($\mathcal{M} \models A$), joss $M' \models A$ kaikilla $M' \in \mathcal{M}$.

4. Kaava A on *validi kehysluokassa* $\mathcal{F}$ ($\mathcal{F} \models A$), joss $F \models A$ kaikilla $F \in \mathcal{F}$.

5. Kaava A on K*-validi* ($\models_K A$), joss A on validi kaikkien K-kehysten luokassa.

Kaava A on siis validi mallissa $M = \langle W, R, P \rangle$, joss $M, w \models A$ jokaisella $w \in W$.

Seuraava lemma on erikoistapaus myöhemmin todistettavasta lauseesta 2.14.

Lemma 2.10. *Jokainen propositiologiikan tautologia on K-validi.*

Todistus. Olkoon A propositiologiikan tautologia, ja olkoon $M = \langle W, R, P \rangle$ K-malli sekä $w \in W$. Olkoon v lauseessa 2.6 määritelty totuusjakauma. Nyt $v(A) = t$, koska A on tautologia. Niinpä $M, w \models A$ lauseen 2.6 nojalla. $\square$

[1] *Joukon* ja *luokan* käsitteiden ero kuuluu joukko-opin kurssille. Jokainen joukko on luokka, mutta esim. kaikkien K-kehysten luokka ei ole joukko.

Määritelmä 2.11. Olkoot A sekä $C_1, \dots, C_k$ kaavoja. Kaava $A[p_1/C_1, \dots, p_k/C_k]$ (lyhyesti $A[\bar{p}/\bar{C}]$) määritellään rekursiolla seuraavasti:

$$\begin{aligned} p_i[\bar{p}/\bar{C}] &:= \begin{cases} C_i, & \text{jos } i \in \{1, \dots, k\}, \\ p_i, & \text{muuten,} \end{cases} \\ (\neg A)[\bar{p}/\bar{C}] &:= \neg(A[\bar{p}/\bar{C}]), \\ (A \wedge B)[\bar{p}/\bar{C}] &:= (A[\bar{p}/\bar{C}]) \wedge (B[\bar{p}/\bar{C}]), \\ (\Box A)[\bar{p}/\bar{C}] &:= \Box(A[\bar{p}/\bar{C}]). \end{aligned}$$

Määritelmä 2.12. Modaalilogiikan kaava A on *tautologia,* joss on olemassa sellainen propositiologiikan tautologia B ja sellaiset modaalilogiikan kaavat $C_1, \dots, C_k$, että $A = B[p_1/C_1, \dots, p_k/C_k]$.

Lemma 2.13. *Olkoot $M = \langle W, R, P \rangle$ K-malli ja $C_1, \dots, C_k$ kaavoja. Olkoon $M' = \langle W, R, P' \rangle$, missä*

$$P'(p_i) = \begin{cases} \|C_i\|^M, & \textit{jos } i \in \{1, \dots, k\}, \\ P(p_i), & \textit{muuten.} \end{cases}$$

Tällöin jokaiselle kaavalle A pätee

$$\|A\|^{M'} = \|A[p_1/C_1, \dots, p_k/C_k]\|^M .$$

Todistus. Harjoitustehtävä. □

Lause 2.14. *Jokainen tautologia on K-validi.*

Todistus. Olkoon A modaalilogiikan tautologia. On siis olemassa sellainen propositiologiikan tautologia B ja sellaiset modaalilogiikan kaavat $C_1, \dots, C_k$, että $A = B[p_1/C_1, \dots, p_k/C_k]$. Olkoon $M = \langle W, R, P \rangle$ K-malli. Muodostetaan malli M' kuten lemmassa 2.13. Nyt

$$\|A\|^M = \|B[p_1/C_1, \dots, p_k/C_k]\|^M = \|B\|^{M'} = W,$$

koska B on propositiologiikan tautologiana validi erityisesti mallissa M'. Siis A on validi mallissa M, ja koska M oli mielivaltainen K-malli, niin A on K-validi. □

Lause 2.15. *Olkoot A ja B mielivaltaiset modaalilogiikan kaavat. Tällöin seuraava kaava C on K-validi:*

$$\Box(A \to B) \to (\Box A \to \Box B)$$

Todistus. Olkoon $M = \langle W, R, P\rangle$ K-malli, ja olkoon $w \in W$. Jos $M, w \not\models \Box(A \to B)$, niin implikaation C etujäsen on epätosi maailmassa w ja siis $M, w \models C$. Jos puolestaan $M, w \not\models \Box A$, niin implikaation C takajäsen on tosi maailmassa w ja samoin koko C. Oletetaan siis, että $M, w \models \Box(A \to B)$ ja $M, w \models \Box A$. Olkoon $w' \in W$ sellainen, että $w\, R\, w'$. Nyt $M, w' \models A \to B$ ja $M, w' \models A$, joten $M, w' \models B$. Siispä $M, w \models \Box B$, joten $M, w \models C$. $\Box$

Määritelmä 2.16.

1. *Päättelysääntöskeema* on pari $\langle\{A_1, \ldots, A_n\}, B\rangle$, missä $A_1, \ldots, A_n, B$ ovat kaavoja. Kaavoja $A_1, \ldots, A_n$ kutsutaan säännön *oletuksiksi* eli *premisseiksi,* kaavaa B puolestaan *johtopäätökseksi.*

2. Päättelysääntöskeeman $R = \langle\{A_1, \ldots, A_n\}, B\rangle$ *instanssi* on pari

$$R[\bar{p}/\bar{C}] =$$

$$\langle\{A_1[\bar{p}/\bar{C}], \ldots, A_n[\bar{p}/\bar{C}]\}, B[\bar{p}/\bar{C}]\rangle,$$

missä $C_1, \ldots, C_k$ ovat kaavoja.

Huomaa, että määritelmän mukaan päättelysääntöskeema ja instanssi ovat teknisessä mielessä sama asia, ja itse asiassa samoja määritelmiä ja teoreemoja voidaan tarvittaessa soveltaa kumpaan tahansa. Ero on näkökulmakysymys. Skeema tulkitaan lyhennysmerkinnäksi äärettömän monesta instanssistaan. Jatkossa päättelysääntöskeemaa kutsutaan yleensä lyhyesti vain *päättelysäännöksi,* eikä päättelysääntöjen instansseja useinkaan mainita eksplisiittisesti. Päättelysääntö $\langle\{A_1, \ldots, A_n\}, B\rangle$ kirjoitetaan tavallisesti seuraavassa muodossa:

$$\frac{A_1 \qquad A_2 \qquad \ldots \qquad A_n}{B}.$$

Esimerkki 2.17. Päättelysääntöskeemalla

$$\frac{p_1 \to p_2 \qquad p_1}{p_2}$$

on mm. seuraavat instanssit:

$$\frac{p_1 \to p_2 \qquad p_1}{p_2}, \qquad \frac{(p_3 \vee p_5) \to \Diamond(p_3 \vee p_5) \qquad p_3 \vee p_5}{\Diamond(p_3 \vee p_5)}$$

Määritelmä 2.18. Päättelysääntö $\langle\{A_1, \ldots, A_n\}, B\rangle$ *säilyttää validisuuden,* joss jokaisessa mallissa, jossa $A_1, \ldots, A_n$ ovat valideja, myös B on validi.

Lause 2.19. *Olkoon $\mathcal{R}$ päättelysääntö, joka säilyttää validisuuden. Jos kaikki säännön $\mathcal{R}$ oletukset ovat K-valideja, niin myös sen johtopäätös on K-validi.*

Todistus. Harjoitustehtävä. □

Lause 2.20. *Olkoon $\mathcal{R}$ päättelysääntöskeema, joka säilyttää validisuuden. Tällöin kaikki skeeman $\mathcal{R}$ instanssit säilyttävät validisuuden.*

Todistus. Harjoitustehtävä. □

Lause 2.21. *Seuraavat päättelysäännöt säilyttävät validisuuden:*

(RN)
$$\frac{A}{\Box A}$$

(MP)
$$\frac{A \to B \qquad A}{B}$$

Todistus. Olkoon $M = \langle W, R, P \rangle$ K-malli. Oletetaan, että $M \models A$. Olkoon $w \in W$. Nyt erityisesti kaikilla $w' \in W$, joilla $w\,R\,w'$, pätee $M, w' \models A$, joten $M, w \models \Box A$. Siispä $M \models \Box A$, joten RN säilyttää validisuuden.

Oletetaan sitten, että $M \models A \to B$ ja $M \models A$. Olkoon $w \in W$. Tällöin $M, w \models A \to B$ ja $M, w \models A$, joten $M, w \models B$. Tämä on totta kaikilla $w \in W$, joten $M \models B$. Siispä sääntö MP säilyttää validisuuden. □

Seuraava esimerkki osoittaa, kuinka edellä todistettujen lauseiden avulla voidaan todistaa kaavan olevan K-validi viittaamatta lainkaan suoraan K-malleihin.

Esimerkki 2.22. Kaava $p_1 \to (p_1 \vee \Diamond p_2)$ on tautologia ja siis K-validi. Niinpä säännön RN seuraavan instanssin oletus on K-validi:

$$\frac{p_1 \to (p_1 \vee \Diamond p_2)}{\Box(p_1 \to (p_1 \vee \Diamond p_2))}$$

Siis myös johtopäätös eli kaava $\Box(p_1 \to (p_1 \vee \Diamond p_2))$ on K-validi.

Seuraava lause voidaan todistaa samantapaisella argumentilla.

Lause 2.23. *Seuraava sääntö (monotonisuussääntö, Rule of Monotonicity) säilyttää validisuuden:*

(RM)
$$\frac{A \to B}{\Box A \to \Box B}$$

Todistus. Olkoot A ja B sellaiset kaavat ja M sellainen K-malli, että $M \models A \to B$. Tällöin säännön RN perusteella $M \models \Box(A \to B)$. Kaava $\Box(A \to B) \to (\Box A \to \Box B)$ on lauseen 2.15 nojalla K-validi ja siis erityisesti validi mallissa M. Niinpä säännön MP nojalla $M \models \Box A \to \Box B$. □