Modaalilogiikka
Erilliskoe (4h) 10.12.2015
Ratkaisuja

Taneli Huuskonen

1. Kaavat (a), (c), (d) ja (e) ovat K-valideja, (b) ja (f) eivät.

2. Olkoon $A = p_1 \to \Box \Diamond p_1$.

   Oletetaan, että $F \models A$. Olkoot $w, w' \in W$ sellaiset, että $w \, R \, w'$. Asetetaan $M = \langle W, R, P \rangle$, missä $P(p) = \{w\}$ kaikilla $p \in \mathbb{V}$. Nyt $M, w \models p_1$ ja $M, w \models A$, joten $M, w \models \Box \Diamond p_1$. Niinpä erityisesti $M, w' \models \Diamond p_1$, eli on olemassa sellainen $w'' \in W$, että $w' \, R \, w''$ ja $M, w'' \models p_1$. Tällöin siis $w'' \in P(p_1) = \{w\}$, joten $w'' = w$ ja siis $w' \, R \, w$. Niinpä R on symmetrinen.

   Oletetaan sitten, että R on symmetrinen. Olkoon $M = \langle W, R, P \rangle$, missä P on mielivaltainen. Olkoon $w \in W$ sellainen, että $M, w \models p_1$. Olkoon $w' \in W$ sellainen, että $w \, R \, w'$. Tällöin symmetrian nojalla $w' \, R \, w$, joten $M, w' \models \Diamond p_1$. Tämä on tosi kaikilla w', joilla $w \, R \, w'$, joten $M, w \models \Box \Diamond p_1$. Niinpä $M \models A$. Koska P oli mielivaltainen, niin $F \models A$.

3. Olkoon $F = \langle W, R \rangle$ refleksiivinen euklidinen kehys. Tällöin seuraavat skeemat ovat valideja kehyksessä F:

   $$\begin{array}{cl} (T\,\Diamond) & A \to \Diamond A \\ (5) & \Diamond A \to \Box \Diamond A \\ (5\,\Diamond) & \Diamond \Box A \to \Box A \end{array}$$

   Olkoon B mielivaltainen kaava. Seuraava formaali päättely osoittaa, että kaava $\Box B \to \Box \Box B$ on validi kehyksessä F, koska kaikki päättelyn oletukset ovat valideja kehyksessä F ja kaikki käytetyt säännöt säilyttävät validisuuden:

   $$\begin{array}{lll} (1) & \Box B \to \Diamond \Box B & (T\,\Diamond) \\ (2) & \Diamond \Box B \to \Box \Diamond \Box B & (5) \\ (3) & \Diamond \Box B \to \Box B & (5\,\Diamond) \\ (4) & \Box \Diamond \Box B \to \Box \Box B & (\mathsf{RM}, 3) \\ (5) & \Box B \to \Box \Box B & (\mathsf{PL}, 1, 2, 4) \end{array}$$

Niinpä F on transitiivinen.

4. Olkoot $F_1 = \langle W_1, R_1 \rangle$ ja $F_2 = \langle W_2, R_2 \rangle$, missä

$$\begin{aligned} W_1 &= \{1\}, \\ R_1 &= \{\langle 1, 1 \rangle\}, \\ W_2 &= \{1, 2\}, \\ R_2 &= \{\langle 1, 2 \rangle, \langle 2, 1 \rangle\}. \end{aligned}$$

Olkoon $Z = W_2 \times W_1$. Nyt Z on funktio, koska joukossa W_1 on vain yksi alkio. Selvästi Z on myös surjektio. Lisäksi kaikilla $w_1, w_1' \in W_1$ ja $w_2 \in W_2$, joilla $w_1 \, Z \, w_2$ ja $w_1 \, R \, w_1'$, on olemassa sellainen $w_2' \in W_2$, että $w_1' \, Z \, w_2'$ ja $w_2 \, R \, w_2'$, ja kaikilla $w_1 \in W_1$ ja $w_2, w_2' \in W_2$, joilla $w_1 \, Z \, w_2$ ja $w_2 \, R \, w_2'$, on olemassa sellainen $w_1' \in W_1$, että $w_1' \, Z \, w_2'$ ja $w_1 \, R \, w_1'$. Niinpä Z on kehysten F_2 ja F_1 välinen bisimulaatio, joka on lisäksi (osittainen) surjektio, joten jokainen kehyksessä F_2 validi kaava on validi myös kehyksessä F_1. Ei siis ole olemassa kaavaa A, joka on validi irrefleksiivisessä kehyksessä F_2 eikä ole validi kehyksessä F_1, joka ei ole irrefleksiivinen.

5. **Ratkaisu 1:** Kaava (i) on intuitionistisesti validi. Olkoon $M = \langle W, R, P \rangle$ intuitionistinen K-malli, ja olkoon $w \in W$. Harjoitustehtävän nojalla riittää osoittaa, että jos $M, w \Vdash p_1 \to \neg p_1$, niin $M, w \Vdash \neg p_1$. Oletetaan siis, että $M, w \Vdash p_1 \to \neg p_1$. Olkoon $w' \in W$ sellainen, että $w \, R \, w'$. Jos $M, w' \Vdash p_1$, niin $M, w' \Vdash \neg p_1$, mikä on mahdotonta. Siispä kaikilla w', joilla $w \, R \, w'$, pätee $M, w' \nVdash p_1$, eli $M, w \Vdash \neg p_1$.

   Ratkaisu 2: Kaava (ii) ei ole intuitionistisesti validi. Olkoon $M = \langle W, R, P \rangle$, missä

$$\begin{aligned} W &= \{1, 2\}, \\ R &= \{\langle 1, 1 \rangle, \langle 1, 2 \rangle, \langle 2, 2 \rangle\}, \\ P(p_i) &= \begin{cases} \{2\}, & \text{jos } i = 1, \\ \emptyset, & \text{muuten.} \end{cases} \end{aligned}$$

   On helppo tarkistaa, että M on intuitionistinen malli. Nyt $M, 2 \Vdash p_1$ ja $w \, R \, 2$ kaikilla $w \in W$, joten millään $w \in W$ ei päde $M, w \Vdash \neg p_1$. Niinpä $M, 1 \Vdash \neg p_1 \to p_1$. Toisaalta $M, 1 \nVdash p_1$ ja $1 \, R \, 1$, joten $M, 1 \nVdash (\neg p_1 \to p_1) \to p_1$.