

Modaalilogiikka, harjoitus 9 (18.11.2015)

Taneli Huuskonen

Tehtävissä saa käyttää luennoilla ja kirjassa esitettyjä täydellisyyslauseita, ellei erikseen muuta mainita.

1. (a) Anna esimerkki joukoista W_1, W_2 , näiden osajoukoista $X_1 \subseteq W_1$ ja $X_2 \subseteq W_2$ sekä funktiosta $f: W_1 \rightarrow W_2$, joille on voimassa

$$\begin{aligned} X_2 &= \{f(x) \mid x \in X_1\}, \\ X_1 &\neq \{x \in W_1 \mid f(x) \in X_2\}. \end{aligned}$$

- (b) Anna esimerkki K -malleista $M_1 = \langle W_1, R_1, P_1 \rangle$ ja $M_2 = \langle W_2, R_2, P_2 \rangle$ sekä funktiosta $f: W_1 \rightarrow W_2$, joille seuraavat ehdot ovat voimassa:
 - (i) Kaikilla w_1, w'_1 , joilla $w_1 R_1 w'_1$, pätee $f(w_1) R_2 f(w'_1)$.
 - (ii) Kaikilla w_1, w_2 , joilla $f(w_1) R_2 w_2$, on olemassa sellainen w'_1 , että $w_1 R_1 w'_1$ ja $f(w'_1) = w_2$.
 - (iii) Kaikilla $p \in \mathbb{V}$ pätee $P_2(p) = \{f(w) \mid w \in P_1(p)\}$.
 - (iv) Funktio f ei ole bisimulaatio mallilta M_1 mallille M_2 .

2. Olkoot A ja B kaavoja. Osoita, että kaava $(\Diamond A \wedge \Box B) \rightarrow \Diamond(A \wedge B)$ on systeemin **K** teoreema.
3. Olkoot A ja B kaavoja. Osoita, että kaava $\Diamond(A \wedge \Box B) \leftrightarrow \Box(\Diamond A \wedge B)$ on systeemin **S5** teoreema.
4. Toinen seuraavista kaavoista on systeemin **S4** teoreema. Kumpi?

$$(A) \quad \Box p_1 \rightarrow \Box \Diamond \Box p_1$$

$$(B) \quad \Box \Diamond \Box p_1 \rightarrow \Box p_1$$

Perusteluksi riittää osoittaa, että valitsemasi kaava on teoreema **tai** että toinen ei ole. (Muistutus: **S4** vastaa refleksiivisiä ja transitiivisiä kehyksiä.)

5. Olkoon $M = \langle W, R, P \rangle$, missä

$$\begin{aligned} W &= \mathbb{N}, \\ R &= \{ \langle m, n \rangle \mid m > n \}, \\ P(p_i) &= \begin{cases} \{2n \mid n \in \mathbb{N}\}, & \text{jos } i = 1, \\ \emptyset, & \text{muuten.} \end{cases} \end{aligned}$$

Muodosta mallin M filtraatio kaavan $A = \neg \Box(p_1 \wedge \neg p_1)$ suhteen. (Muistutus: Filtraation maailmoina ovat relaation \sim ekvivalenssiluokat, missä $w \sim w'$ joss $M, w \models B \Leftrightarrow M, w' \models B$ kaikilla kaavan A alikaavoilla B .)

6. Olkoot M ja A kuten edellisessä tehtävässä. Onko kaava A validi mallissa M ? Entä muodostamassasi filtraatiossa?