Modaalilogiikka, harjoitus 8 (11.11.2015)

Taneli Huuskonen

HUOM! Tehtävän 1 ehto (iii) on korjattu.

Ellei tehtävissä muuta mainita, $\mathcal{S} = \langle \mathcal{A}, \mathcal{Q} \rangle$ on mikä tahansa aksiomaattinen systeemi, jonka teoreemojen joukko on normaali modaalilogiikka.

1. Olkoot $M_1 = \langle W_1, R_1, P_1 \rangle$ ja $M_2 = \langle W_2, R_2, P_2 \rangle$ K-mallit sekä $f \colon W_1 \to W_2$ funktio, joille seuraavat ehdot ovat voimassa:

   (i) Kaikilla w_1, w_1', joilla $w_1 \mathrel{R_1} w_1'$, pätee $f(w_1) \mathrel{R_2} f(w_1')$.

   (ii) Kaikilla w_1, w_2, joilla $f(w_1) \mathrel{R_2} w_2$, on olemassa sellainen w_1', että $w_1 \mathrel{R_1} w_1'$ ja $f(w_1') = w_2$.

   (iii) Kaikilla $p \in \mathbb{V}$ pätee $P_1(p) = \{w \mid f(w) \in P_2(p)\}$.

   Osoita, että f on bisimulaatio.

2. Olkoon $\mathcal{S} = \langle \mathcal{A}, \mathcal{Q} \rangle$, missä $\mathcal{A}$ on skeeman (K) kaikkien instanssien joukko ja $\mathcal{Q}$ koostuu säännöistä (RN) ja (PL). Anna esimerkki sellaisesta kaavasta A, että $\langle \mathcal{A} \cup \{p_1\}, \mathcal{Q} \rangle \vdash A$ mutta $\mathcal{S} \nvdash p_1 \to A$. (Vihje: Sovella sääntöä (RN).)

3. Olkoon $\mathcal{S}$ kuten edellisessä tehtävässä. Anna esimerkki äärellisestä kaavajoukosta $\mathcal{B} = \{B_1, \ldots, B_n\}$, jolle systeemi $\langle \mathcal{A} \cup \mathcal{B}, \mathcal{Q} \rangle$ on ristiriitainen, mutta $\nvdash_{\mathcal{S}} \neg(B_1 \wedge \ldots \wedge B_n)$. Voit olettaa edellisen tehtävän ratkaistuksi. (Luennoilla esitetty määritelmä $\mathcal{S}$-ristiriidattomuudelle oli siis virheellinen.)

4. Olkoon Γ maksimaalisesti $\mathcal{S}$-ristiriidaton kaavajoukko, ja olkoot A ja B kaavoja. Osoita, että $A \to B \in \Gamma$ joss $A \notin \Gamma$ tai $B \in \Gamma$.

5. Osoita, että maksimaalisesti $\mathcal{S}$-ristiriidaton kaavajoukko on sulkeinen säännön (PL) suhteen.

6. Olkoon Γ maksimaalisesti $\mathcal{S}$-ristiriidaton kaavajoukko. Osoita, ettei Γ ole normaali modaalilogiikka. (Vihje: On olemassa hyvin yksinkertaiset kaavat A ja B, joille $A \in \Gamma$ ja $A[p_1/B] \notin \Gamma$.)