Modaalilogiikka, harjoitus 7 (28.10.2015)

Taneli Huuskonen

Oppikirjassa todistettujen bisimulaatioita koskevien väitteiden lisäksi tehtävissä saa pitää tunnettuna seuraavaa lausetta:

> Olkoot $F_1 = \langle W_1, R_1 \rangle$ ja $F_2 = \langle W_2, R_2 \rangle$ K-kehykset sekä Z niiden välinen bisimulaatio, joka on osittainen surjektio (siis Z on funktio, $\mathrm{dom}(Z) \subseteq W_1$ ja $\mathrm{rng}(Z) = W_2$). Tällöin jokainen kehyksessä F_1 validi kaava on validi myös kehyksessä F_2.

1. Olkoot $M_1 = \langle W_1, R_1, P_1 \rangle$ ja $M_2 = \langle W_2, R_2, P_2 \rangle$, missä

$$\begin{aligned} W_1 &= \{1\}, \\ R_1 &= \{\langle 1, 1 \rangle\}, \\ W_2 &= \{1, 2\}, \\ R_2 &= \{\langle 1, 2 \rangle, \langle 2, 1 \rangle\}, \end{aligned}$$

   ja $P_1 \colon \mathbb{V} \to \mathcal{P}(W_1)$ mielivaltainen sekä

$$P_2(p) = \begin{cases} \emptyset, & \text{jos } P_1(p) = \emptyset, \\ W_2, & \text{muuten} \end{cases}$$

   kaikilla propositiosymboleilla p. Osoita ilman bisimulaatiota, että kaikilla kaavoilla A pätee $M_1 \models A$ joss $M_2 \models A$. (Vihje: Todista induktiolla kaavan rakenteen suhteen totuusjoukkoja koskeva vahvempi väite.)

2. Onko olemassa modaalilogiikan kaavaa A, joka on validi annetussa kehyksessä F silloin ja vain silloin, kun F ei ole transitiivinen? Perustele huolellisesti käyttämättä myöhempien harjoitusten tuloksia.

3. Olkoot $F_1 = \langle W_1, R_1 \rangle$ ja $F_2 = \langle W_2, R_2 \rangle$ Kripke-kehykset sekä $Z \subseteq W_1 \times W_2$ niiden välinen bisimulaatio, joille pätee seuraavaa:

   (a) F_1 on refleksiivinen, symmetrinen ja transitiivinen (ja siis myös seriaalinen ja euklidinen),

(b) jokaisella $w_1 \in W_1$ on olemassa sellainen $w_2 \in W_2$, että $w_1 \, Z \, w_2$,

(c) jokaisella $w_2 \in W_2$ on olemassa sellainen $w_1 \in W_1$, että $w_1 \, Z \, w_2$.

Mitä mainituista ominaisuuksista (seriaalisuus, refleksiivisyys jne.) kehyksellä F_2 tällöin todistettavasti on?

4. Olkoot $F_1 = \langle W_1, R_1 \rangle$ ja $F_2 = \langle W_2, R_2 \rangle$ erilliset K-kehykset, ja olkoon $F = \langle W_1 \cup W_2, R_1 \cup R_2 \rangle$. Osoita, että jokainen kehyksessä F validi kaava on validi myös kehyksissä F_1 ja F_2. (Vihje: Tarkastele sopivaa bisimulaatiota.)

5. Olkoot $F_1 = \langle W_1, R_1 \rangle$ ja $F_2 = \langle W_2, R_2 \rangle$ erilliset K-kehykset sekä A kaava, joille pätee $F_1 \models A$ ja $F_2 \not\models A$. Osoita, että ei ole olemassa sellaista kaavaa B, että jokaisella kehyksellä F on voimassa $F \models A \Leftrightarrow F \not\models B$.

6. Anna esimerkki sellaisista kaavoista A ja B, että jokaisella kehyksellä F on voimassa $F \models A \Leftrightarrow F \not\models B$.