

Modaalilogiikka, harjoitus 6 (14.10.2015)

Taneli Huuskonen

Voit pitää tehtävissä tunnettuna, että seuraavat skeemat ovat todistuvia systeemissä **S5**:

$$(D) \quad \Box A \rightarrow \Diamond A$$

$$(T) \quad \Box A \rightarrow A$$

$$(B) \quad A \rightarrow \Box \Diamond A$$

$$(4) \quad \Box A \rightarrow \Box \Box A$$

$$(5) \quad \Diamond A \rightarrow \Box \Diamond A$$

$$(T \Diamond) \quad A \rightarrow \Diamond A$$

$$(B \Diamond) \quad \Diamond \Box A \rightarrow A$$

$$(4 \Diamond) \quad \Diamond \Diamond A \rightarrow \Diamond A$$

$$(5 \Diamond) \quad \Diamond \Box A \rightarrow \Box A$$

1. Olkoon A kaava. Todista seuraavat **S5**-ekvivalenssit:

$$(a) \quad \Box \Box A \equiv_{\mathbf{S5}} \Box A,$$

$$(b) \quad \Box \Diamond A \equiv_{\mathbf{S5}} \Diamond A,$$

$$(c) \quad \Diamond \Box A \equiv_{\mathbf{S5}} \Box A,$$

$$(d) \quad \Diamond \Diamond A \equiv_{\mathbf{S5}} \Diamond A.$$

2. Sievennä seuraavat kaavat systeemissä **S5**, ts. etsi mahdollisimman yksinkertaiset kaavat, jotka ovat **S5**-ekvivalentit annettujen kaavojen kanssa.

$$(a) \quad \Diamond \neg \Diamond \Box (p_1 \rightarrow p_2),$$

$$(b) \quad \neg \Diamond \neg \Box \Diamond \neg p_1.$$

3. (a) Johda systeemissä **K** päättelysääntö

$$\frac{A \rightarrow (B \rightarrow C)}{\Box A \rightarrow (\Box B \rightarrow \Box C)}$$

(b) Todista ekvivalenssi $\Box(A \wedge B) \equiv_{\mathbf{K}} \Box A \wedge \Box B$. Voit katsoa toisen suunnan todistetuksi harjoituksen 3 tehtävässä 1.

4. Sievennä systeemissä **S5** kaava $\Box(p_1 \wedge \neg \Box(\Diamond p_1 \wedge \neg p_2))$.

5. (a) Todista systeemissä **K** skeema $(\Box A \vee \Box B) \rightarrow \Box(A \vee B)$.
 (b) Todista systeemissä **S5** skeema $\Box(A \vee \Box B) \leftrightarrow (\Box A \vee \Box B)$. Voit pitää a-kohtaa tunnettuna.
6. Sievennä systeemissä **S5** kaava $\Diamond(p_1 \wedge \neg \Box(\neg p_1 \vee \Diamond p_2))$. Voit pitää tunnettuina seuraavaa muotoa olevia ekvivalensseja:

$$\nabla(A * \Delta B) \equiv_{\mathbf{S5}} \nabla A * \Delta B,$$

missä $*$ on konnektiivi \wedge tai \vee , ja ∇ ja Δ ovat modaalioperaattoreita (\Diamond tai \Box).