Modaalilogiikka, harjoitus 5 (7.10.2015)

Taneli Huuskonen

1. Olkoot A_1, A_2, A_3 sekä B sellaiset kaavat, että $(A_1 \wedge A_2 \wedge A_3) \to B$ on tautologia. Osoita, että seuraava sääntö on johdettavissa systeemissä, jonka aksioomina ovat kaikki tautologiat ja päättelysääntönä modus ponens:

   $$(\mathsf{PL}_3) \qquad \frac{A_1 \quad A_2 \quad A_3}{B}$$

2. Olkoon $\mathcal{S} = \langle \mathcal{A}, \mathcal{Q} \rangle$ aksiomaattinen systeemi, ja olkoon Σ sellainen joukko, että $\mathcal{A} \subseteq \Sigma$ ja että Σ on sulkeinen sääntöjoukon $\mathcal{Q}$ suhteen. Osoita, että jokainen systeemin $\mathcal{S}$ teoreema kuuluu joukkoon Σ.

3. Olkoon $\mathcal{S} = \langle \mathcal{A}, \mathcal{Q} \rangle$ aksiomaattinen systeemi, ja olkoon $\mathcal{R} = \langle \mathcal{B}, C \rangle$ sääntö, joka on johdettavissa systeemissä $\mathcal{S}$. Osoita, että systeemin $\mathcal{S}$ teoreemojen joukko on sulkeinen säännön $\mathcal{R}$ suhteen. (Vihje: Lausetta 4.5 voi käyttää apuna.)

4. Olkoon $\mathcal{M}$ malliluokka. Osoita, että luokassa $\mathcal{M}$ validien kaavojen joukko on sulkeinen jokaisen sellaisen säännön suhteen, joka säilyttää validisuuden.

5. Olkoon $\mathcal{S} = \langle \mathcal{A}, \mathcal{Q} \rangle$, missä $\mathcal{A}$ on skeemojen (K) ja (T) kaikkien instanssien joukko ja $\mathcal{Q}$ on validisuuden säilyttävä homogeeninen sääntöjoukko, joka sisältää säännöt (RN) ja (PL). Osoita, että
   (a) jokainen systeemin $\mathcal{S}$ teoreema on validi kaikissa refleksiivisissä kehyksissä,
   (b) systeemin $\mathcal{S}$ teoreemojen joukko on normaali modaalilogiikka.

6. Johda edellisen tehtävän mukaisessa aksiomaattisessa systeemissä jokin päättelysääntö, joka **ei** säilytä validisuutta (eikä siis ole tämän kurssin käytännön mukaan hyväksyttävä). Perustele vastauksesi sopivalla vastaesimerkillä.