Modaalilogiikka, harjoitus 4 (30.9.2015)

Taneli Huuskonen

Tehtävissä, joissa jotakin on todistettava formaalilla päättelyllä, pelkkä päättely riittää ilman sanallisia selityksiä.

1. Olkoon $F = \langle W, R \rangle$ K-kehys. Osoita, että seuraavat ehdot ovat yhtäpitävät:

   (i) F on euklidinen (ts. kaikilla $w, w', w'' \in W$, joilla $w\,R\,w'$ ja $w\,R\,w''$, pätee $w'\,R\,w''$,

   (ii) $F \models \Diamond A \to \Box \Diamond A$ kaikilla kaavoilla A,

   (iii) $F \models \Diamond p_1 \to \Box \Diamond p_1$.

   (Vihje: Implikaatio (ii) $\Rightarrow$ (iii) on triviaali. Todista kaksi muuta implikaatiota.)

2. Olkoon $F = \langle W, R \rangle$ K-kehys. Osoita, että seuraavat ehdot ovat yhtäpitävät:

   (i) F on transitiivinen (ts. kaikilla $w, w', w'' \in W$, joilla $w\,R\,w'$ ja $w'\,R\,w''$, pätee $w\,R\,w''$,

   (ii) $F \models \Diamond \Diamond A \to \Diamond A$ kaikilla kaavoilla A,

   (iii) $F \models \Diamond \Diamond p_1 \to \Diamond p_1$.

3. Todista formaalilla päättelyllä, että kaikki seuraavan skeeman instanssit ovat K-valideja:

   $$\Box(A \to B) \to (\Diamond A \to \Diamond B)$$

   Huom! Käytä kirjan mukaista määritelmää: $\Box$ on peruskonnektiivi, $\Diamond A$ on lyhennys kaavalle $\neg \Box \neg A$. (Vihje: Skeeman (K) instanssi

   $$\Box(\neg B \to \neg A) \to (\Box \neg B \to \Box \neg A)$$

   voi olla hyödyllinen, samoin implikaation transitiivisuussääntö.)

4. Todista formaalilla päättelyllä, että seuraava sääntö säilyttää validisuuden:

$$\frac{\Diamond\Box\Diamond A \to \Diamond A \qquad \Diamond A \to \Box\Diamond A}{\Diamond\Diamond A \to \Diamond A}$$

   Voit käyttää edellisessä tehtävässä käsiteltyä skeemaa aksioomaskeemana.

5. Todista edellisten tehtävien avulla, että jokainen symmetrinen euklidinen K-kehys on transitiivinen. Voit pitää tunnettuna, että K-kehys F on symmetrinen, joss $F \models \Diamond\Box A \to A$ kaikilla A.