Modaalilogiikka, harjoitus 3 (23.9.2015)

Taneli Huuskonen

Tehtävissä, joissa jotakin on todistettava formaalilla päättelyllä, pelkkä päättely riittää ilman sanallisia selityksiä.

1. Todista formaalilla päättelyllä, että kaava $\Box(p_1 \wedge p_2) \to (\Box p_1 \wedge \Box p_2)$ on K-validi. Voit pitää tunnettuina kaikkia K-valideiksi osoitettuja kaavoja ja kaikkia validisuuden säilyttäviksi osoitettuja sääntöjä. (Vihje: Voit aloittaa todistamalla kaavan $\Box(p_1 \wedge p_2) \to \Box p_1$.)

2. Todista formaalilla päättelyllä, että implikaation transitiivisuussääntö
$$\frac{A \to B \qquad B \to C}{A \to C}$$
säilyttää validisuuden. Voit käyttää tätä sääntöä jatkossa erikseen perustelematta.

3. Todista formaalilla päättelyllä, että seuraava sääntö säilyttää validisuuden:
$$\frac{A \to (B \to C)}{\Box A \to (\Box B \to \Box C)}.$$

4. Olkoon $\mathcal{M}$ malliluokka. Osoita, että relaatio $\equiv_{\mathcal{M}}$ (looginen ekvivalenttisuus luokassa $\mathcal{M}$) on ekvivalenssirelaatio eli että seuraavat ehdot ovat voimassa kaikille kaavoille A, B, C:

   - $A \equiv_{\mathcal{M}} A$,
   - jos $A \equiv_{\mathcal{M}} B$, niin $B \equiv_{\mathcal{M}} A$,
   - jos $A \equiv_{\mathcal{M}} B$ ja $B \equiv_{\mathcal{M}} C$, niin $A \equiv_{\mathcal{M}} C$.

5. Olkoon $\langle A_1, \ldots, A_k \rangle$ todistus homogeenisessä aksioomasysteemissä $\mathcal{S} = \langle \mathcal{A}, \mathcal{Q} \rangle$. Olkoot edelleen p propositiosymboli ja B kaava. Osoita, että $\langle A_1[p/B], \ldots, A_k[p/B] \rangle$ on todistus systeemissä $\mathcal{S}$.

6. Olkoon F K-kehys, ja olkoot A kehyksessä F validi kaava, p propositiosymboli sekä B kaava. Osoita, että $F \models A[p/B]$. (Vihje: Lemma 2.13 voi olla hyödyllinen.)