Modaalilogiikka, harjoitus 12 (9.12.2015)

Taneli Huuskonen

Ellei tehtävissä muuta mainita, $\mathcal{S} = \langle \mathcal{A}, \mathcal{Q} \rangle$ on propositiologiikan aksioomaattinen systeemi, jossa sääntönä on modus ponens ja aksioomat ovat seuraavat:

1. $A \to (B \to A)$
2. $(A \to (B \to C)) \to ((A \to B) \to (A \to C))$
3. $(A \wedge B) \to A$
4. $(A \wedge B) \to B$
5. $A \to (B \to (A \wedge B))$
6. $A \to (A \vee B)$
7. $B \to (A \vee B)$
8. $(A \to C) \to ((B \to C) \to ((A \vee B) \to C))$
9. $A \to (\neg A \to B)$
10. $(A \to \neg B) \to (B \to \neg A)$

(Täsmällisemmin: $\mathcal{Q}$ on säännön MP kaikkien instanssien joukko ja $\mathcal{A}$ on yllä lueteltujen skeemojen kaikkien instanssien joukko.)
Merkintä $\Gamma \vdash_{\mathcal{S}} A$ tarkoittaa $\vdash_{\mathcal{S}'} A$, missä $\mathcal{S}' = \langle \mathcal{A} \cup \Gamma, \mathcal{Q} \rangle$.

1. Olkoon A propositiologiikan kaava. Todista formaalisti $\vdash_{\mathcal{S}} A \to A$. (Vihje: Aksioomaskeemat 1 ja 2 riittävät.)

2. Olkoot B ja C kaavoja sekä Γ kaavajoukko. Osoita, että $\Gamma \vdash_{\mathcal{S}} B \to C$ joss $\Gamma \cup \{B\} \vdash_{\mathcal{S}} C$. (Vihje: Induktio todistuksen pituuden suhteen epätriviaalissa suunnassa.)

3. Olkoon Γ kaavajoukko. Osoita, että seuraavat ehdot ovat yhtäpitävät:

   (i) Kaikilla kaavoilla A pätee $A \in \Gamma$ joss $\Gamma \vdash_{\mathcal{S}} A$,

   (ii) $\mathcal{A} \subseteq \Gamma$ ja Γ on sulkeinen säännön (MP) suhteen.

4. Olkoot A ja B kaavoja, ja olkoon $M = \langle W, R, P \rangle$ intuitionistinen K-malli.

   (a) Osoita, että $M, w \Vdash A \to B$ kaikilla $w \in W$, joss kaikilla $w \in W$, joilla $M, w \Vdash A$, pätee $M, w \Vdash B$.

   (b) Osoita, ettei millään $w \in W$ päde $M, w \Vdash A$ ja $M, w \Vdash \neg A$.

5. Olkoon $M_I = \langle W_I, R_I, P_I \rangle$ intuitionistisen logiikan kanoninen malli. (Muistutus: W_I on kaikkien sellaisten **ristiriidattomien** kaavajoukkojen Γ joukko, jotka toteuttavat tehtävässä 3 käsitellyt ehdot ja lisäksi kaikilla kaavoilla A ja B, joilla $A \vee B \in \Gamma$, pätee $A \in \Gamma$ tai $B \in \Gamma$, $w\ R_I\ w' \Leftrightarrow w \subseteq w'$, ja $P_I(p) = \{w \in W_I \mid p \in w\}$.) Olkoot A ja B sellaiset kaavat, että kaikilla $w \in W_I$ pätee $M_I, w \Vdash A \Leftrightarrow A \in w$ ja $M_I, w \Vdash B \Leftrightarrow B \in w$. Osoita, että kaikilla $w \in W_I$ pätee

   (a) $M_I, w \Vdash A \vee B \Leftrightarrow A \vee B \in w$,

   (b) $M_I, w \Vdash \neg A \Leftrightarrow \neg A \in w$.

6. Olkoon A propositiologiikan kaava. Osoita, että

   (a) $\vdash_{\mathcal{S}} \neg(A \wedge \neg A)$

   (b) $\vdash_{\mathcal{S}} \neg\neg(A \vee \neg A)$

   Voit käyttää intuitionistisen logiikan täydellisyyslausetta, jos haluat.