

# Modaalilogiikka, harjoitus 11 (2.12.2015)

Taneli Huuskonen

Muistutus:  $K$ -malli  $M = \langle W, R, P \rangle$  on *intuitionistinen*, joss  $R$  on refleksiivinen ja transitiivinen sekä kaikille  $w, w' \in W$  ja  $p \in \mathbb{V}$ , joille  $w \in P(p)$  ja  $w R w'$ , pätee  $w' \in P(p)$ .

1. Olkoon  $M = \langle W, R, P \rangle$  refleksiivinen ja transitiivinen  $K$ -malli, ja olkoon  $M' = \langle W, R, P' \rangle$ , missä  $P'(p) = \{w \in W \mid M, w \models \Box p\}$  kaikilla  $p \in \mathbb{V}$ . Pidetään tunnettuna, että  $M'$  on intuitionistinen. Osoita, että kaikille propositiologiikan kaavoille  $A$  ja kaikille  $w \in W$  pätee  $M', w \Vdash A$  joss  $M, w \models A^*$ , missä

$$\begin{aligned} p^* &= \Box p, \text{ kun } p \in \mathbb{V}, \\ (A \wedge B)^* &= A^* \wedge B^*, \\ (A \vee B)^* &= A^* \vee B^*, \\ (\neg A)^* &= \Box \neg A^*, \\ (A \rightarrow B)^* &= \Box(A^* \rightarrow B^*). \end{aligned}$$

2. Olkoon  $M = \langle W, R, P \rangle$  intuitionistinen  $K$ -malli. Osoita, että tällöin kaikille propositiologiikan kaavoille  $A$  ja kaikille  $w \in W$  pätee  $M, w \Vdash A$  joss  $M, w \models A^*$ .
3. Olkoon  $A$  kaava. Osoita, että kaava  $B = (A \rightarrow \neg A) \rightarrow \neg A$  on intuitionistisesti validi (siis validi kaikissa intuitionistisissa malleissa).
4. Olkoot  $A$  ja  $B$  kaavoja. Osoita, että kaava  $C = (A \rightarrow \neg B) \rightarrow (B \rightarrow \neg A)$  on intuitionistisesti validi.
5. Osoita, että kaava  $A = \neg\neg p_1 \rightarrow p_1$  ei ole intuitionistisesti validi. (Vihje: On olemassa kaksimaailmainen vastaesimerkki.)
6. Onko kaava  $(\neg p_1 \rightarrow p_1) \rightarrow p_1$  intuitionistisesti validi?