Modaalilogiikka, harjoitus 10 (25.11.2015)

Taneli Huuskonen

Tehtävissä oletetaan, että $M = \langle W, R, P \rangle$ on K-malli, Γ on alikaavojen suhteen sulkeinen kaavajoukko, $w \sim w'$ joss kaikille $A \in \Gamma$ pätee $M, w \models A \Leftrightarrow M, w' \models A$, ja

$$\begin{aligned} W^* &= \{[w] \mid w \in W\}, \\ R^f &= \{\langle [w], [w'] \rangle \mid w \, R \, w'\}, \\ R^F &= \{\langle [w], [w'] \rangle \mid \forall \Box B \in \Gamma \colon M, w \models \Box B \Rightarrow M, w' \models B\}, \\ P^*(p) &= \{[w] \mid w \in P(p)\}. \end{aligned}$$

1. Osoita, että $R^f \subseteq R^F$.

2. Oletetaan, että R on transitiivinen ja että Γ on sulkeinen myös negaation ja operaattorin $\Box$ suhteen. Osoita, että R^F on transitiivinen.

3. Oletetaan, että R on euklidinen ja että Γ on sulkeinen myös negaation ja operaattorin $\Box$ suhteen. Osoita, että R^F on euklidinen.

4. Oletetaan, että R on euklidinen. Olkoon A kaava. Osoita, että $M \models \Diamond \Diamond \Diamond A \leftrightarrow \Diamond \Diamond A$.

5. Oletetaan, että R on euklidinen. Olkoon $A = \Diamond \Box \Box \Diamond \Diamond \Box p_1$. Etsi kaava B, jossa on vain kaksi modaalioperaattoria ja joka on mallissa M loogisesti ekvivalentti kaavan A kanssa. Voit pitää tunnettuina seuraavia loogisia ekvivalenttisuuksia:

$$\begin{array}{ll} \Diamond \Diamond \Diamond C \equiv_M \Diamond \Diamond C & \Diamond \Diamond \Box C \equiv_M \Diamond \Box C \\ \Diamond \Box \Diamond C \equiv_M \Diamond \Diamond C & \Diamond \Box \Box C \equiv_M \Diamond \Box C \\ \Box \Diamond \Diamond C \equiv_M \Box \Diamond C & \Box \Diamond \Box C \equiv_M \Box \Box C \\ \Box \Box \Diamond C \equiv_M \Box \Diamond C & \Box \Box \Box C \equiv_M \Box \Box C \end{array}$$

6. Anna esimerkki sellaisesta transitiivisesta K-mallista M, että $\Box^m p_1 \not\equiv_M \Box^n p_1$ aina kun $m \neq n$, missä

$$\begin{aligned} \Box^0 A &= A, \\ \Box^{k+1} A &= \Box(\Box^k A). \end{aligned}$$

(Vihje: Relaatio R voi olla järjestys.)