Modaalilogiikka, harjoitus 9 (18.11.2015)
Ratkaisuja

Taneli Huuskonen

1. (a) Olkoot

$$\begin{aligned} W_1 &= \{0,1\}, \\ W_2 &= \{0\}, \\ X_1 &= \{0\}, \\ X_2 &= \{0\}, \\ f(w) &= 0, \text{ kun } w \in W_1. \end{aligned}$$

Selvästi $X_2 = \{f(0)\} = \{f(x) \mid x \in X_1\}$, mutta

$$X_1 \neq W_1 = \{x \in W_1 \mid f(x) \in X_2\}.$$

(b) Olkoot W_1, W_2, X_1, X_2 kuten edellisessä kohdassa, ja olkoot

$$\begin{aligned} R_1 &= \emptyset, \\ R_2 &= \emptyset, \\ P_1(p_i) &= \begin{cases} X_1, & \text{jos } i = 1, \\ \emptyset, & \text{muuten,} \end{cases} \\ P_2(p_i) &= \begin{cases} X_2, & \text{jos } i = 1, \\ \emptyset, & \text{muuten.} \end{cases} \end{aligned}$$

Tehtävässä annetut ehdot (i) ja (ii) toteutuvat triviaalisti, koska relaatiot R_1 ja R_2 ovat tyhjiä. Ehto (iii) toteutuu edellisen kohdan nojalla. Ehto (iv) toteutuu, koska $1 \notin P_1(p_1)$ mutta $f(1) = 0 \in P_2(p_1)$.

2. Olkoon $M = \langle W, R, P\rangle$ K-malli, ja olkoon $w \in W$. Oletetaan, että $M, w \models \Diamond A \land \Box B$. Tällöin erityisesti $M, w \models \Diamond A$, joten on olemassa sellainen $w' \in W$, että $w\,R\,w'$ ja $M, w' \models A$. Tällöin myös $M, w' \models B$, koska $M, w \models \Box B$. Niinpä $M, w' \models A \land B$, joten $M, w \models \Diamond(A \land B)$. Implikaatio $(\Diamond A \land \Box B) \to \Diamond(A \land B)$ on siis K-validi, joten täydellisyyslauseen nojalla se on myös systeemin **K** teoreema.

3. Olkoon $M = \langle W, R, P\rangle$ K-malli, jossa R on refleksiivinen, symmetrinen ja transitiivinen, ja olkoon $w \in W$. Oletetaan ensin, että $M, w \models \Diamond(A \land \Box B)$. Tällöin on olemassa sellainen $w' \in W$, että $w\,R\,w'$ ja $M, w' \models A \land \Box B$. Olkoon nyt $w'' \in W$ sellainen, että $w\,R\,w''$. Tällöin $w''\,R\,w'$, koska R on symmetrinen ja transitiivinen. Niinpä $M, w'' \models \Diamond A$. Lisäksi $w'\,Rw''$, joten $M, w'' \models B$. Siis kaikilla w'', joilla $w\,Rw''$, pätee $M, w'' \models \Diamond A \land B$, eli $M, w \models \Box(\Diamond A \land B)$.

   Oletetaan sitten, että $M, w \models \Box(\Diamond A \land B)$. Tällöin erityisesti $M, w \models \Diamond A$, koska R on refleksiivinen. On siis olemassa sellainen $w' \in W$, että $w\,R\,w'$ ja $M, w' \models A$. Olkoon sitten $w'' \in W$ sellainen, että $w'\,R\,w''$. Tällöin wRw'', koska R on transitiivinen. Niinpä $M, w'' \models \Diamond A \land B$ ja siis erityisesti $M, w'' \models B$. Siispä $M, w' \models \Box B$ ja edelleen $M, w' \models A \land \Box B$, joten $M, w \models \Diamond(A \land \Box B)$.

   Jokaisen refleksiivisen, symmetrisen ja transitiivisen K-mallin M jokaisessa maailmassa w pätee siis $M, w \models \Diamond(A \land \Box B)$ joss $M, w \models \Box(\Diamond A \land B)$. Niinpä kaava $\Diamond(A \land \Box B) \leftrightarrow \Box(\Diamond A \land B)$ on validi kaikissa refleksiivisissä, symmetrisissä ja transitiivisissa kehyksissä, joten se on täydellisyyslauseen mukaan todistuva systeemissä **S5**.

4. **Ratkaisu 1a:** Seuraava formaali päättely osoittaa, että A on systeemin **S4** teoreema:

(1)	$\Box p_1 \to \Box\Box p_1$	(4)
(2)	$\Box p_1 \to \Diamond\Box p_1$	$(T\,\Diamond)$
(3)	$\Box\Box p_1 \to \Box\Diamond\Box p_1$	$(\mathsf{RM}, 2)$
(4)	$\Box p_1 \to \Box\Diamond\Box p_1$	$(\mathsf{PL}, 1, 3)$

   Ratkaisu 1b: Olkoon $\langle W, R, P\rangle$ refleksiivinen ja transitiivinen K-malli, ja olkoon $w \in W$. Oletetaan, että $M, w \models \Box p_1$. Olkoon $w' \in W$ sellainen, että $w\,R\,w'$. Olkoon edelleen $w'' \in W$ sellainen, että $w'\,R\,w''$. Tällöin transitiivisuuden nojalla $w\,R\,w''$. Niinpö $M, w'' \models p_1$. Tämä pätee kaikilla $w'' \in W$, joilla $w'\,R\,w''$, joten $M, w' \models \Box p_1$. Refleksiivisyyden nojalla $M, w' \models \Diamond\Box p_1$. Niinpä $M, w \models \Box\Diamond\Box p_1$. Kaava A on siis validi kaikissa refleksiivisissä transitiivisissa K-malleissa, joten A on systeemin **S4** teoreema.

Ratkaisu 2: Olkoon $M = \langle W, R, P \rangle$, missä

$$\begin{aligned} W &= \{0, 1\}, \\ R &= \{\langle 0,0\rangle, \langle 0,1\rangle, \langle 1,1\rangle\}, \\ P(p_i) &= \begin{cases} \{1\}, & \text{jos } i = 1, \\ \emptyset, & \text{muuten.} \end{cases} \end{aligned}$$

Mallissa M ainoa maailmasta 1 saavutettava maailma on 1 ja $M, 1 \models p_1$, joten $M, 1 \models \Box p_1$. Maailma 1 on saavutettavissa sekä maailmasta 0 että maailmasta 1, joten $M, 1 \models \Diamond \Box p_1$ ja $M, 0 \models \Diamond \Box p_1$. Niinpä $M, 0 \models \Box \Diamond \Box p_1$. Toisaalta $M, 0 \not\models \Box p_1$, joten kaava B ei ole validi transitiivisessa refleksiivisessä mallissa M. Eheyslauseen perusteella B ei ole systeemin **S4** teoreema.

5. Kaavan A alikaavat ovat p_1, $\neg p_1$, $p_1 \wedge \neg p_1$, $\Box(p_1 \wedge \neg p_1)$ sekä A itse. Näiden totuusjoukot ovat seuraavat:

$$\begin{aligned} \|p_1\|^M &= \{2n \mid n \in \mathbb{N}\}, \\ \|\neg p_1\|^M &= \{2n+1 \mid n \in \mathbb{N}\}, \\ \|p_1 \wedge \neg p_1\|^M &= \emptyset, \\ \|\Box(p_1 \wedge \neg p_1)\|^M &= \{0\}, \\ \|\neg \Box(p_1 \wedge \neg p_1)\|^M &= \mathbb{N} \setminus \{0\}. \end{aligned}$$

Tämän perusteella voidaan todeta, että tasan seuraavat kaavan A alikaavat ovat tosia mallin M maailmoissa:

- $M, 0 \models p_1,\ \Box(p_1 \wedge \neg p_1)$,
- $M, w \models \neg p_1,\ A$, kun $w \in \{2n+1 \mid n \in \mathbb{N}\}$,
- $M, w \models p_1,\ A$, kun $w \in \{2n+2 \mid n \in \mathbb{N}\}$.

Niinpä ekvivalenssiluokkia on kolme:

$$\begin{aligned} [0] &= \{0\}, \\ [1] &= \{2n+1 \mid n \in \mathbb{N}\}, \\ [2] &= \{2n+2 \mid n \in \mathbb{N}\}. \end{aligned}$$

Asetetaan siis $W^* = \{[0], [1], [2]\}$. Mikään ekvivalenssiluokka ei ole saavutettavissa luokasta [0], mutta kaikki luokat ovat saavutettavissa luokista [1] ja [2]. Niinpä asetetaan $R^* = R^f = \{[1], [2]\} \times W^*$. Propositiosymboli p_1 saa arvon tosi luokissa [0] ja [2], muut propositiosymbolit eivät missään. Siispä

$$P^*(p_i) = \begin{cases} \{[0], [2]\}, & \text{jos } i = 1, \\ \emptyset, & \text{muuten.} \end{cases}$$

Etsitty filtraatio on nyt K-malli $M^* = \langle W^*, R^*, P^* \rangle$.

6. Mallissa M mikään maailma ei ole saavutettavissa maailmasta 0, joten $M, 0 \models \Box(p_1 \wedge \neg p_1)$ ja siis $M, 0 \not\models A$. Niinpä A ei ole validi mallissa M. Filtraatiossa M^* puolestaan mikään maailma ei ole saavutettavissa maailmasta [0], joten $M^*, [0] \models \Box(p_1 \wedge \neg p_1)$ ja jälleen $M^*, [0] \not\models A$. Niinpä A ei ole validi myöskään filtraatiossa M^*.