Modaalilogiikka, harjoitus 8 (11.11.2015) Ratkaisuja

Taneli Huuskonen

1. Määritelmän mukaan epätyhjä relaatio $Z \subseteq W_1 \times W_2$ on bisimulaatio, joss seuraavat ehdot ovat voimassa:

   (a) Kaikilla $p \in \mathbb{V}$, $w_1 \in W_1$ ja $w_2 \in W_2$, joilla $w_1 \, Z \, w_2$, pätee $w_1 \in P_1(p)$ joss $w_2 \in P_2(p)$.

   (b) Kaikilla $w_1, w_1' \in W_1$ ja $w_2 \in W_2$, joilla $w_1 \, R_1 \, w_1'$ ja $w_1 \, Z \, w_2$, on sellainen w_2', että $w_1' \, Z \, w_2'$ ja $w_2 \, R_2 \, w_2'$.

   (c) Kaikilla $w_1 \in W_1$ ja $w_2, w_2' \in W_2$, joilla $w_1 \, Z \, w_2$ ja $w_2 \, R_2 \, w_2'$, on olemassa sellainen $w_1' \in W_1$, että $w_1' \, Z \, w_2'$ ja $w_1 \, R_1 \, w_1'$.

   Kun yllä valitaan relaatioksi Z funktio f, niin ehto $w_1 Z w_2$ saa muodon $w_2 = f(w_1)$ ja bisimulaation määritelmästä tulee seuraava:

   (a) Kaikilla $p \in \mathbb{V}$, $w_1 \in W_1$ ja $w_2 \in W_2$, joilla $w_2 = f(w_1)$, pätee $w_1 \in P_1(p)$ joss $w_2 \in P_2(p)$.

   (b) Kaikilla $w_1, w_1' \in W_1$ ja $w_2 \in W_2$, joilla $w_1 \, R_1 \, w_1'$ ja $w_2 = f(w_1)$, on sellainen w_2', että $w_2' = f(w_1')$ ja $w_2 \, R_2 \, w_2'$.

   (c) Kaikilla $w_1 \in W_1$ ja $w_2, w_2' \in W_2$, joilla $w_2 = f(w_1)$ ja $w_2 \, R_2 \, w_2'$, on olemassa sellainen $w_1' \in W_1$, että $w_2' = f(w_1')$ ja $w_1 \, R_1 \, w_1'$.

   Olkoot $p \in \mathbb{V}$ ja $w_1 \in W_1$. Asetetaan $w_2 = f(w_1)$. Nyt tehtävässä annetun ehdon (iii) nojalla

   $$w_1 \in P_1(p) \Leftrightarrow f(w_1) \in P_2(p) \Leftrightarrow w_2 \in P_2(p),$$

   joten ehto (a) toteutuu. Ehto (b) toteutuu tehtävässä annetun ehdon (i) nojalla, kun valitaan $w_2' = f(w_1')$. Ehto (c) on selvästi vaihtoehtoinen tapa esittää tehtävässä annettu ehto (ii).

2. Valitaan $A = \Box p_1$. Seuraava päättely osoittaa, että A on systeemin $\langle \mathcal{A} \cup \{p_1\}, \mathcal{Q} \rangle$ teoreema:

(1)	p_1	(aksiooma)
(2)	$\Box p_1$	$(\mathsf{RN}, 1)$

Toisaalta implikaatio $p_1 \to \Box p_1$ ei ole K-validi, joten se ei ole todistuva systeemissä $\mathcal{S}$.

3. Olkoon $\mathcal{B} = \{p_1, \neg \Box p_1\}$, ja olkoon C mielivaltainen kaava. Tällöin $(\Box p_1 \wedge \neg \Box p_1) \to C$ on tautologia riippumatta kaavasta C. Niinpä seuraava päättely osoittaa, että C on systeemin $\langle \mathcal{A} \cup \mathcal{B}, \mathcal{Q} \rangle$ teoreema:

(1)	p_1	(aksiooma)
(2)	$\Box p_1$	$(\mathsf{RN}, 1)$
(3)	$\neg \Box p_1$	(aksiooma)
(4)	C	$(\mathsf{PL}, 2, 3)$

Systeemi $\langle \mathcal{A} \cup \mathcal{B}, \mathcal{Q} \rangle$ on siis ristiriitainen. Toisaalta $\neg(p_1 \wedge \neg \Box p_1)$ on ekvivalentti implikaation $p_1 \to \Box p_1$ kanssa eikä siis ole K-validi eikä todistuva systeemissä $\mathcal{S}$.

4. ”$\Rightarrow$”: Oletetaan, että $A \to B \in \Gamma$. Tehdään vastaoletus: $A \in \Gamma$ ja $B \notin \Gamma$. Tällöin $\neg B \in \Gamma$, koska Γ on maksimaalisesti ristiriidaton. Kuitenkin $\neg((A \to B) \wedge A \wedge \neg B)$ on tautologia, joten $\vdash_{\mathcal{S}} \neg((A \to B) \wedge A \wedge \neg B)$, vastoin oletusta joukon Γ $\mathcal{S}$-ristiriidattomuudesta.

   ”$\Leftarrow$”: Oletetaan, että $A \notin \Gamma$ tai $B \in \Gamma$. Tehdään vastaoletus: $A \to B \notin \Gamma$. Tällöin $\neg(A \to B) \in \Gamma$. Tarkastellaan tapausta $A \notin \Gamma$. Tällöin $\neg A \in \Gamma$, mutta $\vdash_{\mathcal{S}} \neg(\neg(A \to B) \wedge \neg A)$, joten Γ on $\mathcal{S}$-ristiriitainen vastoin oletusta. Myös tapauksessa $B \in \Gamma$ saadaan ristiriita, koska $\vdash_{\mathcal{S}} \neg(\neg(A \to B) \wedge B)$.

5. Olkoon Γ maksimaalisesti $\mathcal{S}$-ristiriidaton kaavajoukko, ja olkoon

$$\frac{B_1 \quad \ldots \quad B_n}{C}$$

   säännön (PL) instanssi, jolloin $(B_1 \wedge \ldots \wedge B_n) \to C$ on tautologia ja siis myös $\neg(B_1 \wedge \ldots \wedge B_n \wedge \neg C)$ on tautologia. Niinpä $\vdash_{\mathcal{S}} \neg(B_1 \wedge \ldots \wedge B_n \wedge \neg C)$. Tehdään vastaoletus: $B_1, \ldots, B_n \in \Gamma$ mutta $C \notin \Gamma$. Tällöin $\neg C \in \Gamma$, joten yllä todetun perusteella Γ on $\mathcal{S}$-ristiriitainen, mikä on vastoin oletusta.

6. Luennoilla todistetun lauseen nojalla $p_1 \in \Gamma$ tai $\neg p_1 \in \Gamma$. Olkoon A se kaavoista p_1 ja $\neg p_1$, joka kuuluu joukkoon Γ. Olkoon edelleen B kaava $\neg p_1$. Tällöin $A[p_1/B] = \neg A$ riippumatta siitä, kumpi vaihtoehtoisista kaavoista A on. Niinpä $A[p_1/B] \notin \Gamma$, vaikka $A \in \Gamma$, joten Γ ei ole sulkeinen korvaamisen suhteen eikä siis ole normaali modaalilogiikka.