Modaalilogiikka, harjoitus 7 (28.10.2015)
Ratkaisuja

Taneli Huuskonen

1. Osoitetaan induktiolla kaavan A rakenteen suhteen, että

$$\|A\|^{M_2} = \begin{cases} \emptyset, & \text{jos } \|A\|^{M_1} = \emptyset, \\ W_2, & \text{muuten.} \end{cases}$$

Tästä seuraa todistettava väite, koska joukon W_1 ainoat osajoukot ovat $\emptyset$ ja W_1, joten

$$M_1 \models A \Leftrightarrow \|A\|^{M_1} = W_1 \Leftrightarrow \|A\|^{M_1} \neq \emptyset \Leftrightarrow \|A\|^{M_2} = W_2 \Leftrightarrow M_2 \models A.$$

1° Jos A on propositiosymboli, väite seuraa suoraan funktion P_2 määritelmästä.

2° Oletetaan, että $A = \neg B$ ja väite pätee kaavalle B. Jos $\|A\|^{M_1} = \emptyset$, niin $\|B\|^{M_1} = W_1$ ja siis induktio-oletuksen nojalla $\|B\|^{M_2} = W_2$ ja edelleen $\|B\|^{M_2} = \emptyset$. Muussa tapauksessa $\|B\|^{M_1} \neq W_1$ ja siis $\|B\|^{M_1} = \emptyset$, koska joukossa W_1 on vain yksi alkio. Niinpä induktio-oletuksen nojalla $\|B\|^{M_2} = \emptyset$ ja siis $\|A\|^{M_2} = W_2$.

3° Oletetaan, että $A = B \wedge C$ ja väite pätee kaavoille B ja C. Jos $\|A\|^{M_1} = \emptyset$, niin $\|B\|^{M_1} = \emptyset$ tai $\|C\|^{M_1} = \emptyset$. Niinpä tällöin induktio-oletuksen nojalla $\|B\|^{M_2} = \emptyset$ tai $\|C\|^{M_2} = \emptyset$, joten $\|A\|^{M_2} = \emptyset$. Muussa tapauksessa on oltava $\|B\|^{M_1} = \|C\|^{M_1} = W_1$, ja tällöin induktio-oletuksen nojalla $\|B\|^{M_2} = \|C\|^{M_2} = W_2$ ja edelleen $\|A\|^{M_2} = W_2$.

4° Oletetaan, että $A = \Box B$ ja väite pätee kaavalle B. Jos $\|A\|^{M_1} = \emptyset$, niin myös $\|B\|^{M_1} = \emptyset$, mistä seuraa induktio-oletuksen perusteella, että $\|B\|^{M_2} = \emptyset$ ja siis $\|A\|^{M_2} = \emptyset$. Muussa tapauksessa $\|A\|^{M_1} = W_1$ ja edelleen $\|B\|^{M_1} = W_1$, joten induktio-oletuksen nojalla $\|B\|^{M_2} = W_2$. Tällöin $\|A\|^{M_2} = W_2$.

2. Kysytynlaista kaavaa ei ole olemassa. Olkoon A kaava, joka on validi kaikissa epätransitiivisissa kehyksissä. Olkoot M_1 ja M_2 kuten edellisessä tehtävässä, ja olkoot $F_1 = \langle W_1, R_1 \rangle$ ja $F_2 = \langle W_2, R_2 \rangle$. Nyt $F_2 \models A$, joten $M_2 \models A$ ja siis edellisen tehtävän nojalla $M_1 \models A$. Tämä pätee mielivaltaiselle mallille M_1 kehyksessä F_1, joten $F_1 \models A$, vaikka F_1 on transitiivinen.

3. Olkoon $w_2 \in W_2$ mielivaltainen. Tällöin on tehtävän ehdon (c) nojalla olemassa sellainen $w_1 \in W_1$, että $w_1 \, Z \, w_2$, ja edelleen kehyksen F_1 seriaalisuuden nojalla sellainen w_1', että $w_1 \, R_1 \, w_1'$. Koska Z on bisimulaatio, on siis olemassa sellainen $w_2' \in W_2$, että $w_1' \, Z \, w_2'$ ja $w_2 \, R \, w_2'$. Siispä F_2 on seriaalinen.

   Olkoon $F_1 = \langle W_1, R_1 \rangle$, missä W_1 ja R_1 ovat kuten tehtävässä 1, ja olkoon $F_2 = \langle W_2, R_2 \rangle$, missä

$$\begin{aligned} W_2 &= \{1, 2, 3\}, \\ R_2 &= \{\langle 1, 2 \rangle, \langle 2, 3 \rangle, \langle 3, 1 \rangle\}. \end{aligned}$$

   Olkoon edelleen $Z = W_1 \times W_2$. On helppo tarkistaa, että Z toteuttaa tehtävässä annetut ehdot. Toisaalta F_2 ei ole refleksiivinen, symmetrinen, euklidinen eikä transitiivinen. Niinpä seriaalisuus on tehtävässä mainituista ominaisuuksista ainoa, joka kehyksellä F_2 todistettavasti on.

4. Merkitään $W = W_1 \cup W_2$ ja $R = R_1 \cup R_2$. Olkoot Z_1 ja Z_2 seuraavat relaatiot:

$$\begin{aligned} Z_1 &= \{\langle w, w \rangle \mid w \in W_1\}, \\ Z_2 &= \{\langle w, w \rangle \mid w \in W_2\}. \end{aligned}$$

   On helppo tarkistaa, että Z_1 on bisimulaatio kehysten F ja F_1 välillä ja vastaavasti Z_2 bisimulaatio kehysten F ja F_2 välillä. Lisäksi Z_1 ja Z_2 ovat osittaisia surjektioita, joten väite seuraa suoraan tehtävien yhteydessä annetusta, luennoilla todistetusta lauseesta.

5. Oletetaan, että kaava B olisi vastaesimerkki todistettavalle väitteelle. Olkoon $F = \langle W, R \rangle$, missä $W = W_1 \cup W_2$ ja $R = R_1 \cup R_2$. Nyt $F \not\models A$, koska muuten edellisen tehtävän nojalla olisi $F_2 \models A$. Siispä $F \models B$, joten jälleen edellisen tehtävän perusteella $F_1 \models B$. Tämä on kuitenkin ristiriidassa vastaoletuksen kanssa, koska $F_1 \models A$.

6. Olkoon $A = p_1 \vee \neg p_1$ ja $B = p_1 \wedge \neg p_1$. Tällöin jokaisella kehyksellä F pätee, että $F \models A$ ja $F \not\models B$, joten kaavat A ja B toteuttavat vaaditun ehdon.