Modaalilogiikka, harjoitus 5 (7.10.2015)
Ratkaisuja

Taneli Huuskonen

1.

(1)	A_1	(oletus)
(2)	A_2	(oletus)
(3)	A_3	(oletus)
(4)	$A_1 \to (A_2 \to (A_3 \to (A_1 \wedge A_2 \wedge A3))$	(taut)
(5)	$A_2 \to (A_3 \to (A_1 \wedge A_2 \wedge A_3))$	$(\mathsf{MP}, 1, 4)$
(6)	$A_3 \to (A_1 \wedge A_2 \wedge A_3)$	$(\mathsf{MP}, 2, 5)$
(7)	$A_1 \wedge A_2 \wedge A_3$	$(\mathsf{MP}, 3, 6)$
(8)	$(A_1 \wedge A_2 \wedge A_3) \to B$	(taut)
(9)	B	$(\mathsf{MP}, 7, 8)$

2. Olkoon B systeemin $\mathcal{S}$ teoreema, ja olkoon $\langle B_1, \ldots, B_n \rangle$ teoreeman B todistus. Osoitetaan induktiolla luvun $i \leq n$ suhteen seuraava väite:

   Kaikilla $j \leq i$ pätee $B_i \in \Sigma$.

   Tapaus $i = 0$ on triviaali. Oletetaan, että väite pätee luvulle $i < n$. Olkoon $j \leq i+1$. Jos $j \leq i$, niin väite seuraa suoraan induktio-oletuksesta. Tarkastellaan siis tapausta $j = i + 1$. Jos $A_j \in \mathcal{A}$, niin $A_j \in \Sigma$, koska $\mathcal{A} \subseteq \Sigma$. Oletetaan sitten, että $\langle \mathcal{B}, C \rangle$ on sellainen systeemin $\mathcal{S}$ sääntö, että $\mathcal{B} \subseteq \{B_1, \ldots, B_{j-1}\}$ ja $C = A_j$. Tällöin induktio-oletuksen nojalla $\mathcal{B} \subseteq \Sigma$, joten $A_j \in \Sigma$, koska Σ on sulkeinen sääntöjoukon $\mathcal{Q}$ suhteen.

3. Olkoon Σ systeemin $\mathcal{S}$ teoreemojen joukko ja Σ' systeemin $\langle \mathcal{A} \cup \mathcal{B}, \mathcal{Q} \rangle$ teoreemojen joukko. Koska $\mathcal{R}$ on johdettavissa systeemissä $\mathcal{S}$, niin $C \in \Sigma'$. Oletetaan nyt, että $\mathcal{B} \subseteq \Sigma$. Tällöin $\mathcal{A} \cup \mathcal{B} \subseteq \Sigma$, ja lauseen 4.5 nojalla Σ on sulkeinen sääntöjoukon $\mathcal{Q}$ suhteen, joten edellisen tehtävän perusteella $\Sigma' \subseteq \Sigma$ ja siis erityisesti $C \in \Sigma$. Niinpä Σ on sulkeinen säännön $\mathcal{R}$ suhteen.

4. Olkoon Σ luokassa $\mathcal{M}$ validien kaavojen joukko, ja olkoon $\mathcal{R} = \langle \mathcal{B}, C \rangle$ päättelysääntö, joka säilyttää validisuuden. Oletetaan, että $\mathcal{B} \subseteq \Sigma$ eli että $\mathcal{M} \models B$ kaikilla $B \in \mathcal{B}$. Olkoon $M \in \mathcal{M}$ mielivaltainen. Nyt $M \models B$ kaikilla $B \in \mathcal{B}$, joten $M \models C$, koska $\mathcal{R}$ säilyttää validisuuden. Niinpä $M \models C$ kaikilla $M \in \mathcal{M}$, joten $\mathcal{M} \models C$.

5. Olkoon Σ systeemin $\mathcal{S}$ teoreemojen joukko, ja olkoon Σ' kaikissa refleksiivisissä kehyksissä validien kaavojen joukko.

   (a) Aiemmin on todistettu, että skeeman (K) kaikki instanssit ovat K-valideja ja siis erityisesti valideja kaikissa refleksiivisissä kehyksissä ja että skeeman (T) kaikki instanssit ovat valideja kaikissa refleksiivisissä kehyksissä. Siispä $\mathcal{A} \subseteq \Sigma'$. Lisäksi edellisen tehtävän nojalla Σ' on sulkeinen sääntöjoukon $\mathcal{Q}$ suhteen. Niinpä tehtävän 2 perusteella $\Sigma \subseteq \Sigma'$.

   (b) Koska $\mathcal{Q}$ sisältää sääntöjoukon (PL), niin erityisesti jokainen tautologia kuuluu joukkoon Σ. Kaikki skeeman (K) instanssit ovat systeemin $\mathcal{S}$ aksioomia ja siis kuuluvat joukkoon Σ. Joukko Σ on sulkeinen sääntöjoukon $\mathcal{Q}$ suhteen ja siis erityisesti sulkeinen sääntöjen (MP) ja (RN) suhteen. Systeemi $\mathcal{S}$ on määritelmänsä perusteella homogeeninen, joten kaikilla $A \in \Sigma$ ja $p \in \mathbb{V}$ ja kaikilla kaavoilla B pätee $A[p/B] \in \Sigma$. Edellisen kohdan nojalla kaava $p_1 \wedge \neg p_1$, joka ei ole validi missään mallissa, ei kuulu joukkoon Σ.

6. Johdetaan sääntö $\langle \{A\}, \Diamond A \rangle$:

(1)	A	(oletus)
(2)	$A \to \Diamond A$	(T)
(3)	$\Diamond A$	$(\mathsf{PL}, 1, 2)$

Olkoon $M = \langle W, R, P \rangle$, missä

$$\begin{aligned} W &= \{0\}, \\ R &= \emptyset, \\ P(p_i) &= \begin{cases} W, & \text{jos } i = 1, \\ \emptyset, & \text{muuten.} \end{cases} \end{aligned}$$

Nyt $M \models p_1$ mutta $M \not\models \Diamond p_1$, joten yllä johdetun säännön instanssi $\langle \{p_1\}, \Diamond p_1 \rangle$ ei säilytä validisuutta.