

Modaalilogiikka, harjoitus 4 (30.9.2015)

Ratkaisuja

Taneli Huuskonen

1. (i) \Rightarrow (ii): Oletetaan, että F on euklidinen. Olkoon A kaava. Olkoon $M = \langle W, R, P \rangle$ sellainen malli, että $\langle W, R \rangle = F$, ja olkoon $w \in W$ sellainen maailma, että $M, w \models \Diamond A$. On siis olemassa sellainen $w' \in W$, että $w R w'$ ja $M, w' \models A$. Olkoon $w'' \in W$ mielivaltainen sellainen maailma, että $w R w''$. Nyt siis $w R w'$ ja $w R w''$, joten kehyksen F euklidisuuden perusteella $w'' R w'$. Niinpä $M, w'' \models \Diamond A$. Tämä on voimassa kaikilla $w'' \in W$, joilla $w R w''$, joten $M, w \models \Box \Diamond A$. Siis $M \models \Diamond A \rightarrow \Box \Diamond A$. Niinpä $F \models \Diamond A \rightarrow \Box \Diamond A$.

(ii) \Rightarrow (iii): Triviaali.

(iii) \Rightarrow (i): Oletetaan, että $F \models \Diamond p_1 \rightarrow \Box \Diamond p_1$. Tehdään vastaoletus: F ei ole euklidinen. Olkoot $w, w', w'' \in W$ sellaiset maailmat, että $w R w'$ ja $w R w''$ mutta $w' \not R w''$. Olkoon $M = \langle W, R, P \rangle$, missä $\langle W, R \rangle = F$ ja $P(p_i) = \{w''\}$ kaikilla i . Nyt $M, w \models \Diamond p_1$, koska $M, w'' \models p_1$ ja $w R w''$. Toisaalta $M, w' \not\models \Diamond p_1$ ja $w R w'$, joten $M, w \not\models \Box \Diamond p_1$. Siispä $M, w \not\models \Diamond p_1 \rightarrow \Box \Diamond p_1$, joten $M \not\models \Diamond p_1 \rightarrow \Box \Diamond p_1$ ja edelleen $F \not\models \Diamond p_1 \rightarrow \Box \Diamond p_1$. Tämä on ristiriidassa oletuksen kanssa, joten vastaoletus on väärä.

2. (i) \Rightarrow (ii): Oletetaan, että F on transitiivinen. Olkoon A kaava. Olkoon $M = \langle W, R, P \rangle$ sellainen malli, että $\langle W, R \rangle = F$, ja olkoon $w \in W$ sellainen maailma, että $M, w \models \Diamond \Diamond A$. On siis olemassa sellainen $w' \in W$, että $w R w'$ ja $M, w' \models \Diamond A$. Niinpä on myös sellainen maailma $w'' \in W$, että $w' R w''$ ja $M, w'' \models A$. Koska $w R w'$ ja $w' R w''$, niin kehyksen F transitiivisuuden perusteella $w R w''$. Niinpä $M, w \models \Diamond A$, koska $M, w'' \models A$. Tämä on voimassa kaikilla $w \in W$, joilla $M, w \models \Diamond \Diamond A$. Siis $M \models \Diamond \Diamond A \rightarrow \Diamond A$. Niinpä $F \models \Diamond \Diamond A \rightarrow \Diamond A$.

(ii) \Rightarrow (iii): Triviaali.

(iii) \Rightarrow (i): Oletetaan, että $F \models \Diamond \Diamond p_1 \rightarrow \Diamond p_1$. Tehdään vastaoletus: F ei ole transitiivinen. Olkoot $w, w', w'' \in W$ sellaiset maailmat, että

wRw' ja $w'Rw''$ mutta $w \not R w''$. Olkoon $M = \langle W, R, P \rangle$, missä $\langle W, R \rangle = F$ ja $P(p_i) = \{w''\}$ kaikilla i . Nyt $M, w' \models \Diamond p_1$, koska $M, w'' \models p_1$ ja $w' R w''$. Niinpä edelleen $M, w \models \Diamond \Diamond p_1$. Toisaalta $M, w \not\models \Diamond p_1$, koska $w \not R w''$. Siispä $M, w \not\models \Diamond \Diamond p_1 \rightarrow \Diamond p_1$, joten $M \not\models \Diamond \Diamond p_1 \rightarrow \Diamond p_1$ ja edelleen $F \not\models \Diamond \Diamond p_1 \rightarrow \Diamond p_1$. Tämä on ristiriidassa oletuksen kanssa, joten vasta oletus on väärä.

3.

- (1) $(A \rightarrow B) \rightarrow (\neg B \rightarrow \neg A)$ (taut)
- (2) $\Box(A \rightarrow B) \rightarrow \Box(\neg B \rightarrow \neg A)$ (RM, 1)
- (3) $\Box(\neg B \rightarrow \neg A) \rightarrow (\Box \neg B \rightarrow \Box \neg A)$ (K)
- (4) $\Box(A \rightarrow B) \rightarrow (\Box \neg B \rightarrow \Box \neg A)$ (TI, 2, 3)
- (5) $(\Box \neg B \rightarrow \Box \neg A) \rightarrow (\Diamond A \rightarrow \Diamond B)$ (taut)
- (6) $\Box(A \rightarrow B) \rightarrow (\Diamond A \rightarrow \Diamond B)$ (TI, 4, 5)

Yllä TI merkitsee edellisissä harjoituksissa validisuuden säilyttäväksi todistettua implikaation transitiivisuussääntöä.

4.

- (1) $\Diamond \Box \Diamond A \rightarrow \Diamond A$ (oletus)
- (2) $\Diamond A \rightarrow \Box \Diamond A$ (oletus)
- (3) $\Box(\Diamond A \rightarrow \Box \Diamond A)$ (RN, 2)
- (4) $\Box(\Diamond A \rightarrow \Box \Diamond A)$
 $\rightarrow (\Diamond \Diamond A \rightarrow \Diamond \Box \Diamond A)$ (ed.teht.)
- (5) $\Diamond \Diamond A \rightarrow \Diamond \Box \Diamond A$ (MP, 3, 4)
- (6) $\Diamond \Diamond A \rightarrow \Diamond A$ (TI, 1, 5)

5. Olkoon F symmetrinen ja euklidinen K -kehys. Tällöin aiemmin todistetun perusteella tiedetään, että jokaisella kaavalla A on voimassa $F \models \Diamond \Box A \rightarrow A$ ja $F \models \Diamond A \rightarrow \Box \Diamond A$. Niinpä erityisesti $F \models \Diamond \Box \Diamond p_1 \rightarrow \Diamond p_1$ ja $F \models \Diamond p_1 \rightarrow \Box \Diamond p_1$. Tehtävässä 4 käsitellyn päätteleysäännön mukaan $F \models \Diamond \Diamond p_1 \rightarrow \Diamond p_1$, joten tehtävän 2 nojalla F on transitiivinen.