Modaalilogiikka, harjoitus 3 (23.9.2015)
Ratkaisuja

Taneli Huuskonen

1.

(1)	$(p_1 \wedge p_2) \to p_1$	(taut)
(2)	$\Box(p_1 \wedge p_2) \to \Box p_1$	$(\mathsf{RM}, 1)$
(3)	$(p_1 \wedge p_2) \to p_2$	(taut)
(4)	$\Box(p_1 \wedge p_2) \to \Box p_2$	$(\mathsf{RM}, 3)$
(5)	$(\Box(p_1 \wedge p_2) \to \Box p_1)$ $\to ((\Box(p_1 \wedge p_2) \to \Box p_2) \to (\Box(p_1 \wedge p_2) \to (\Box p_1 \wedge \Box p_2)))$	(taut)
(6)	$(\Box(p_1 \wedge p_2) \to \Box p_2) \to (\Box(p_1 \wedge p_2) \to (\Box p_1 \wedge \Box p_2))$	$(\mathsf{MP}, 2, 5)$
(7)	$\Box(p_1 \wedge p_2) \to (\Box p_1 \wedge \Box p_2)$	$(\mathsf{MP}, 4, 6)$

2.

(1)	$A \to B$	(oletus)
(2)	$B \to C$	(oletus)
(3)	$(A \to B) \to ((B \to C) \to (A \to C))$	(taut)
(4)	$(B \to C) \to (A \to C)$	$(\mathsf{MP}, 1, 3)$
(5)	$A \to C$	$(\mathsf{MP}, 2, 4)$

3.

(1)	$A \to (B \to C)$	(oletus)
(2)	$\Box A \to \Box(B \to C)$	$(\mathsf{RM}, 1)$
(3)	$\Box(B \to C) \to (\Box B \to \Box C)$	(K)
(4)	$\Box A \to (\Box B \to \Box C)$	(tr,2,3)

Yllä (tr) viittaa edellisessä tehtävässä todistettuun implikaation transitiivisuussääntöön.

4. Kaava $A \leftrightarrow A$ on tautologia, joten se on K-validi ja siis validi malliluokassa M, joten $A \equiv_{\mathcal{M}} A$. Osoitetaan formaalilla päättelyllä, että seuraava sääntö säilyttää validisuuden:

$$\frac{A \leftrightarrow B}{B \leftrightarrow A}$$

Päättely on yksinkertainen:

(1)	$A \leftrightarrow B$	(oletus)
(2)	$(A \leftrightarrow B) \to (B \leftrightarrow A)$	(taut)
(3)	$B \leftrightarrow A$	$(\mathsf{MP}, 1, 2)$

Jos siis A ja B ovat sellaiset kaavat, että $A \equiv_{\mathcal{M}} B$ eli $\mathcal{M} \models A \leftrightarrow B$, niin $\mathcal{M} \models B \leftrightarrow A$ eli $B \equiv_{\mathcal{M}} A$. Niinpä $\equiv_{\mathcal{M}}$ on symmetrinen.

Osoitetaan seuraavaksi formaalilla päättelyllä, että myös seuraava sääntö säilyttää validisuuden:

$$\frac{A \leftrightarrow B \quad B \leftrightarrow C}{A \leftrightarrow C}$$

Tämäkin päättely on intuitiivisesti selvä, mutta kahden oletuksen käyttäminen edellyttää lisäaskelia:

(1)	$A \leftrightarrow B$	(oletus)
(2)	$B \leftrightarrow C$	(oletus)
(3)	$(A \leftrightarrow B) \to ((B \leftrightarrow C) \to (A \leftrightarrow C))$	(taut)
(4)	$(B \leftrightarrow C) \to (A \leftrightarrow C)$	$(\mathsf{MP}, 1, 3)$
(5)	$A \leftrightarrow C$	$(\mathsf{MP}, 2, 4)$

Jos nyt A, B ja C ovat sellaiset kaavat, että $A \equiv_{\mathcal{M}} B$ ja $B \equiv_{\mathcal{M}} C$, niin yllä päätellyn säännön oletukset ovat valideja luokassa $\mathcal{M}$, joten myös johtopäätös on validi luokassa $\mathcal{M}$. Siis $\mathcal{M} \models A \leftrightarrow C$ eli $A \equiv_{\mathcal{M}} C$. Niinpä relaatio $\equiv_{\mathcal{M}}$ on transitiivinen.

5. Olkoon $i \in \{1, \ldots, k\}$. Jos $A_i \in \mathcal{A}$, niin systeemin $\mathcal{S}$ homogeenisuuden perusteella $A_i[p/B] \in \mathcal{A}$. Oletetaan sitten, että on sellainen sääntö $\mathcal{R} = \langle \mathcal{C}, D \rangle \in \mathcal{Q}$, että $\mathcal{C} \subseteq \{A_1, \ldots, A_{i-1}\}$ ja $A_i = D$. Nyt $\mathcal{C}[p/B] \subseteq \{A_1[p/B], \ldots, A_{i-1}[p/B]\}$ ja $A_i[p/B] = D[p/B]$. Lisäksi $\mathcal{R}[p/B] = \langle \mathcal{C}[p/B], D[p/B] \rangle \in \mathcal{S}$, koska $\mathcal{S}$ on homogeeninen. Niinpä jokaisella $i \in \{1, \ldots, k\}$ jompikumpi määritelmän 4.2 ehdoista on voimassa jonolle $\langle A_1[p/B], \ldots, A_k[p/B] \rangle$, joten kyseinen jono on todistus systeemissä $\mathcal{S}$.

6. Olkoon $M = \langle W, R, P \rangle$ sellainen K-malli, että $\langle W, R \rangle = F$. Asetetaan $M' = \langle W, R, P' \rangle$, missä

$$P'(p_i) = \begin{cases} \|B\|^M, & \text{jos } p_i = p, \\ P(p_i), & \text{muuten.} \end{cases}$$

Nyt lemman 2.13 nojalla

$$\|A[p/B]\|^M = \|A\|^{M'} = W,$$

koska A on validi kehyksessä F ja siis erityisesti validi mallissa M'. Niinpä $M \models A[p/B]$. Tämä pätee kaikille K-malleille $M = \langle W, R, P \rangle$, joille $\langle W, R \rangle = F$, joten $F \models A[p/B]$.