Modaalilogiikka, harjoitus 2 (16.9.2015)
Ratkaisuja

Taneli Huuskonen

1. 1° Oletetaan, että A on propositiosymboli p_i. Jos $i \in \{1, \ldots, k\}$, niin

$$\|A\|^{M'} = \|p_i\|^{M'} = P'(p_i) = \|C_i\|^M = \left\|A[\bar{p}/\bar{C}]\right\|^M .$$

Muussa tapauksessa

$$\|A\|^{M'} = \|p_i\|^{M'} = P'(p_i) = P(p_i) = \|p_i\|^M = \left\|A[\bar{p}/\bar{C}]\right\|^M .$$

2° Oletetaan, että $A = \neg B$ ja väite pätee kaavalle B. Tällöin

$$\|A\|^{M'} = W \setminus \|B\|^{M'} = W \setminus \left\|B[\bar{p}/\bar{C}]\right\|^M = \left\|A[\bar{p}/\bar{C}]\right\|^M .$$

3° Oletetaan, että $A = D \wedge E$ ja väite pätee kaavoille D ja E. Tällöin

$$\|A\|^{M'} = \|D\|^{M'} \cap \|E\|^{M'} = \left\|D[\bar{p}/\bar{C}]\right\|^M \cap \left\|E[\bar{p}/\bar{C}]\right\|^M = \left\|A[\bar{p}/\bar{C}]\right\|^M .$$

4° Oletetaan, että $A = \Diamond B$ ja väite pätee kaavalle B. Tällöin

$$\begin{aligned}
\|A\|^{M'} &= \|\Diamond B\|^{M'} \\
&= \{w \in W \mid (\exists w' \in W)(w \, R \, w' \wedge w' \in \|B\|^{M'})\} \\
&= \{w \in W \mid (\exists w' \in W)(w \, R \, w' \wedge w' \in \left\|B[\bar{p}/\bar{C}]\right\|^M)\} \\
&= \left\|\Diamond B[\bar{p}/\bar{C}]\right\|^M \\
&= \left\|A[\bar{p}/\bar{C}]\right\|^M .
\end{aligned}$$

2. Oletetaan, että $A_1, \ldots, A_n$ ovat K-valideja. Olkoon M mielivaltainen K-malli. Tällöin oletuksen nojalla $M \models A_i$ kaikilla $i \in \{1, \ldots, n\}$. Koska sääntö

$$\frac{A_1 \quad A_2 \quad \ldots \quad A_n}{B}$$

säilyttää validisuuden, niin $M \models B$. Koska M oli mielivaltaisesti valittu K-malli, niin B on validi kaikissa K-malleissa eli K-validi.

3. Olkoon $M = \langle W, R, P\rangle$ mielivaltainen sellainen malli, että $M \models A_i[\bar{p}/\bar{C}]$ kaikilla $i \in \{1, \ldots, n\}$. Määritellään P' kuten tehtävässä 1:

$$P'(p_i) = \begin{cases} \|C_i\|^M, & \text{jos } i \in \{1, \ldots, k\}, \\ P(p_i), & \text{muuten.} \end{cases}$$

Asetetaan $M' = \langle W, R, P'\rangle$. Nyt jokaisella $i \in \{1, \ldots, n\}$ pätee $M' \models A_i$, koska

$$\|A_i\|^{M'} = \left\|A_i[\bar{p}/\bar{C}]\right\|^M = W.$$

Niinpä oletuksen mukaan $M' \models B$, joten

$$\left\|B[\bar{p}/\bar{C}]\right\|^M = \|B\|^{M'} = W$$

ja siis $M \models B[\bar{p}/\bar{C}]$. Niinpä sääntö

$$\frac{A_1[\bar{p}/\bar{C}] \quad A_2[\bar{p}/\bar{C}] \quad \ldots \quad A_n[\bar{p}/\bar{C}]}{B[\bar{p}/\bar{C}]}$$

säilyttää validisuuden.

4. Olkoot A ja B sellaiset kaavat ja M sellainen K-malli, että $M \models A \leftrightarrow B$. Tällöin $M \models A \to B$ ja $M \models B \to A$ propositiologiikan nojalla. Niinpä kurssitekstin lauseen 2.23 perusteella $M \models \Box A \to \Box B$ ja $M \models \Box B \to \Box A$, mistä seuraa jälleen propositiologiikan perusteella, että $M \models \Box A \leftrightarrow \Box B$.

   Sama voidaan esittää formaalina päättelynä:

(1)	$A \leftrightarrow B$	(oletus)
(2)	$(A \leftrightarrow B) \to (A \to B)$	(tautologia)
(3)	$A \to B$	$(\mathsf{MP}, 1, 2)$
(4)	$\Box A \to \Box B$	$(\mathsf{RM}, 3)$
(5)	$(A \leftrightarrow B) \to (B \to A)$	(tautologia)
(6)	$B \to A$	$(\mathsf{MP}, 1, 5)$
(7)	$\Box B \to \Box A$	$(\mathsf{RM}, 6)$
(8)	$(\Box A \to \Box B) \to ((\Box B \to \Box A) \to (\Box A \leftrightarrow \Box B)$	(tautologia)
(9)	$(\Box B \to \Box A) \to (\Box A \leftrightarrow \Box B)$	$(\mathsf{MP}, 4, 8)$
(10)	$\Box A \leftrightarrow \Box B$	$(\mathsf{MP}, 7, 9)$

5. Olkoon $M = \langle W, R, P\rangle$, missä

$$\begin{aligned} W &= \{1\}, \\ R &= \emptyset, \\ P(p_i) &= W. \end{aligned}$$

Nyt $M \models p_1$, koska $\|p_1\|^M = P(p_1) = W$. Toisaalta ei ole olemassa maailmaa $w' \in W$, jolle pätisi $1Rw'$, joten $M, 1 \not\models \Diamond p_1$ ja siis $M \not\models \Diamond p_1$. Tehtävässä annetun päättelysäännön instanssi

$$\frac{p_1}{\Diamond p_1}$$

ei siis säilytä validisuutta, koska sen ainoa oletus on validi mallissa M mutta johtopäätös ei.

6. (a) Olkoon $w \in W$ mielivaltainen. Tällöin on oletuksen perusteella olemassa sellainen $w' \in W$, että $w \, R \, w'$. Kaava A on validi mallissa M, joten erityisesti $M, w' \models A$. Niinpä $M, w \models \Diamond A$. Koska $w \in W$ oli mielivaltainen, sama pätee kaikille $w \in W$. Niinpä $M \models \Diamond A$.

   (b) Olkoon $M = \langle W, R, P \rangle$, missä

$$\begin{aligned} W &= \{1, 2\}, \\ R &= \{\langle 1, 2 \rangle, \langle 2, 1 \rangle\}, \\ P(p_i) &= \{1\}. \end{aligned}$$

   Selvästi M toteuttaa (a)-kohdan ehdon. Toisaalta ainoa $w' \in W$, jolle pätee $1 \, R \, w'$, on 2, ja $M, 2 \not\models p_1$. Niinpä $M, 1 \not\models \Diamond p_1$, mutta $M, 1 \models p_1$, joten $M, 1 \not\models p_1 \to \Diamond p_1$ ja siis $M \not\models p_1 \to \Diamond p_1$.