Modaalilogiikka, harjoitus 12 (9.12.2015) Ratkaisuja

Taneli Huuskonen

1.
(1)	$(A \to ((A \to A) \to A))$ $\to ((A \to (A \to A)) \to (A \to A))$	(aks. 2)
(2)	$A \to ((A \to A) \to A)$	(aks. 1)
(3)	$(A \to (A \to A)) \to (A \to A)$	$(\mathsf{MP}, 1, 2)$
(4)	$A \to (A \to A)$	(aks. 1)
(5)	$A \to A$	$(\mathsf{MP}, 3, 4)$

2. "$\Rightarrow$": Oletetaan, että $\Gamma \vdash_{\mathcal{S}} B \to C$. Tällöin $\Gamma \cup \{B\} \vdash_{\mathcal{S}} B \to C$ ja $\Gamma \cup \{B\} \vdash_{\mathcal{S}} B$, joten säännön MP perusteella $\Gamma \cup \{B\} \vdash_{\mathcal{S}} C$.

   "$\Leftarrow$": Oletetaan, että $\Gamma \cup \{B\} \vdash_{\mathcal{S}} C$. Olkoon $\langle C_1, \ldots, C_n \rangle$ kaavan C todistus systeemissä $\langle \mathcal{A} \cup \Gamma \cup \{B\}, \mathcal{Q} \rangle$. Osoitetaan induktiolla indeksin $i \leq n$ suhteen, että $\Gamma \vdash_{\mathcal{S}} B \to C_j$ aina, kun $1 \leq j \leq i$. Tapaus $i = 0$ on triviaali. Oletetaan siis, että $i \in \{1, \ldots, n\}$ ja että $\Gamma \vdash_{\mathcal{S}} B \to C_j$ aina, kun $1 \leq j < i$. Nyt $C_i \in \mathcal{A} \cup \Gamma \cup \{B\}$ tai C_i on päätelty säännöllä MP. Tarkastellaan eri tapauksia.

   Jos $C_i \in \mathcal{A} \cup \Gamma$, niin triviaalisti $\Gamma \vdash_{\mathcal{S}} C_i$. Toisaalta $C_i \to (B \to C_i) \in \mathcal{A}$, joten säännön MP nojalla $\Gamma \vdash_{\mathcal{S}} B \to C_i$.

   Jos $C_i = B$, niin edellisen tehtävän perusteella $\Gamma \vdash_{\mathcal{S}} B \to C_i$.

   Jos C_i on päätelty säännöllä MP, niin on olemassa sellaiset indeksit $j, k < i$, että $C_j = C_k \to C_i$. Induktio-oletuksen mukaan siis $\Gamma \vdash_{\mathcal{S}} B \to C_k$ ja $\Gamma \vdash_{\mathcal{S}} B \to (C_k \to C_i)$. Lisäksi

$$(B \to (C_k \to C_i)) \to ((B \to C_k) \to (B \to C_i)) \in \mathcal{A}.$$

   Niinpä säännön MP nojalla $\Gamma \vdash_{\mathcal{A}} (B \to C_k) \to (B \to C_i)$ ja edelleen $\Gamma \vdash_{\mathcal{A}} B \to C_i$.

   Nyt erityisesti $\Gamma \vdash_{\mathcal{A}} B \to C_n$, ja $C_n = C$.

3. (i) $\Rightarrow$ (ii): Oletetaan, että kaikilla kaavoilla A pätee $A \in \Gamma$ joss $\Gamma \vdash_{\mathcal{S}} A$. Olkoon $A \in \mathcal{A}$. Tällöin triviaalisti $\Gamma \vdash_{\mathcal{S}} A$, joten $A \in \Gamma$. Niinpä $\mathcal{A} \subseteq \Gamma$. Olkoot sitten A ja B sellaiset kaavat, että $A \in \Gamma$ ja $A \to B \in \Gamma$. Tällöin $\Gamma \vdash_{\mathcal{S}} A$ ja $\Gamma \vdash_{\mathcal{S}} A \to B$, joten $\Gamma \vdash_{\mathcal{S}} B$ ja siis $B \in \Gamma$. Siis Γ on sulkeinen säännön MP suhteen.

   (ii) $\Rightarrow$ (i): Oletetaan, että $\mathcal{A} \subseteq \Gamma$ ja että Γ on sulkeinen säännön MP suhteen. Olkoon Σ systeemin $\langle \mathcal{A} \cup \Gamma, \mathcal{Q} \rangle$ teoreemojen joukko. Nyt $\mathcal{A} \cup \Gamma = \Gamma$, joten kurssitekstin lauseen 5.6 nojalla $\Sigma \subseteq \Gamma$. Toisaalta triviaalisti $\Gamma \subseteq \Sigma$, joten $\Gamma = \Sigma$ eli kaikille kaavoille A pätee $A \in \Gamma$ joss $\Gamma \vdash_{\mathcal{S}} A$.

4. (a) "$\Rightarrow$": Oletetaan, että $M, w \Vdash A \to B$ kaikilla $w \in W$. Olkoon $w \in W$ sellainen, että $M, w \Vdash A$. Tällöin $M, w \Vdash A \to B$, eli kaikilla $w' \in W$, joilla $w \mathrel{R} w'$ ja $M, w' \Vdash A$, pätee $M, w' \Vdash B$. Erityisesti $M, w \Vdash B$, koska $w \mathrel{R} w$ ja $M, w \Vdash A$.

   "$\Leftarrow$": Oletetaan, että kaikilla $w \in W$, joilla $M, w \Vdash A$, pätee $M, w \Vdash B$. Olkoon $w \in W$ mielivaltainen. Olkoon $w' \in W$ sellainen, että $w \mathrel{R} w'$ ja $M, w' \Vdash A$. Tällöin $M, w' \Vdash B$. Niinpä $M, w \Vdash A \to B$.

   (b) Olkoon $w \in W$ mielivaltainen. Tehdään vastaoletus: $M, w \Vdash A$ ja $M, w \Vdash \neg A$. Tällöin kaikilla $w' \in W$, joilla $w \mathrel{R} w'$, pätee $M, w' \nVdash A$. Erityisesti $w \mathrel{R} w$, joten $M, w \nVdash A$, mikä on vastoin oletusta.

5. (a) "$\Rightarrow$": Olkoon $w \in W_I$. Oletetaan, että $M_I, w \Vdash A \vee B$. Tällöin $M_I, w \Vdash A$ tai $M_I, w \Vdash B$, joten induktio-oletuksen perusteella $A \in w$ tai $B \in w$. Aksioomaskeemojen 6 ja 7 avulla nähdään, että tällöin $w \vdash_{\mathcal{S}} A \vee B$, joten $A \vee B \in w$.

   "$\Leftarrow$": Olkoon $w \in W_I$. Oletetaan, että $A \vee B \in w$. Tällöin kanonisen mallin määritelmän nojalla $A \in w$ tai $B \in w$. Niinpä induktio-oletuksen mukaan $M_I, w \Vdash A$ tai $M_I, w \Vdash B$, joten $M_I, w \Vdash A \vee B$.

   (b) "$\Rightarrow$": Olkoon $w \in W_I$. Oletetaan, että $M_I, w \Vdash \neg A$. Tehdään vastaoletus: $\neg A \notin w$. Tällöin $w \nvdash_{\mathcal{S}} \neg A$, joten $w \nvdash_{\mathcal{S}} B \to \neg A$, missä B on aksiooma $A \to (A \to A)$. Niinpä skeeman 10 nojalla $w \nvdash_{\mathcal{S}} A \to \neg B$, mistä luennoilla todistetun lemman mukaan seuraa, että on olemassa sellainen $w' \in W_I$, että $w \mathrel{R_I} w'$, $A \in w'$ ja $\neg B \notin w'$. Nyt induktio-oletuken perusteella $M_I, w' \models A$, mikä on ristiriidassa oletuksen $M_I, w \models \neg A$ kanssa. Siis $\neg A \in w$.

   "$\Leftarrow$": Olkoon $w \in W_I$. Oletetaan, että $\neg A \in w$. Olkoon $w' \in W_I$ sellainen, että $w \mathrel{R_I} w'$. Tällöin $\neg A \in w'$. Niinpä $A \notin w'$, koska muuten aksioomaskeeman 9 nojalla w' olisi ristiriitainen.

Induktio-oletuksen mukaan tästä seuraa, että $M_I, w' \not\Vdash A$. Koska tämä on voimassa kaikille $w' \in W_I$, joilla $w R_I w'$, niin $M_I, w \Vdash \neg A$.

6. (a) **Ratkaisu 1:** Olkoon $M = \langle W, R, P\rangle$ intuitionistinen K-malli, ja olkoon $w \in W$. Olkoon $w' \in W$ sellainen, että $w R w'$. Tehtävän 4b nojalla $M, w' \not\Vdash A \wedge \neg A$. Niinpä $M, w \Vdash \neg(A \wedge \neg A)$. Täydellisyyslauseen mukaan $\vdash_{\mathcal{S}} \neg(A \wedge \neg A)$.

Ratkaisu 2: Merkitään $B = A \wedge \neg A$ ja $C = A \to (A \to A)$.

(1)	$(A \to (\neg A \to \neg C))$ $\to (B \to (A \to (\neg A \to \neg C)))$	(aks. 1)
(2)	$A \to (\neg A \to \neg C)$	(aks. 9)
(3)	$B \to (A \to (\neg A \to \neg C))$	$(\mathsf{MP}, 1, 2)$
(4)	$(B \to (A \to (\neg A \to \neg C)))$ $\to ((B \to A) \to (B \to (\neg A \to \neg C)))$	(aks. 2)
(5)	$(B \to A) \to (B \to (\neg A \to \neg C))$	$(\mathsf{MP}, 3, 4)$
(6)	$B \to A$	(aks. 3)
(7)	$B \to (\neg A \to \neg C)$	$(\mathsf{MP}, 5, 6)$
(8)	$(B \to (\neg A \to \neg C))$ $\to ((B \to \neg A) \to (B \to \neg C))$	(aks. 2)
(9)	$(B \to \neg A) \to (B \to \neg C)$	$(\mathsf{MP}, 7, 8)$
(10)	$B \to \neg A$	(aks. 4)
(11)	$B \to \neg C$	$(\mathsf{MP}, 9, 10)$
(12)	$(B \to \neg C) \to (C \to \neg B)$	(aks. 10)
(13)	$C \to \neg B$	$(\mathsf{MP}, 11, 12)$
(14)	C	(aks. 1)
(15)	$\neg B$	$(\mathsf{MP}, 13, 14)$

(b) Olkoon $M = \langle W, R, P\rangle$ intuitionistinen K-malli, ja olkoon $w \in W$. Oletetaan, että jollakin $w' \in W$, jolla $w\ R\ w'$, pätisi $M, w' \Vdash \neg(A \vee \neg A)$. Olkoon $w'' \in W$ sellainen, että $w'\ R\ w''$. Tällöin $M, w'' \not\Vdash A \vee \neg A$, joten erityisesti $M, w'' \not\Vdash A$. Niinpä $M, w' \Vdash \neg A$, joten $M, w' \Vdash A \vee \neg A$, mikä on mahdotonta tehtävän 4b mukaan. Siispä $M, w' \not\Vdash \neg(A \vee \neg A)$ kaikilla $w' \in W$, joilla $w\ R\ w'$, eli $M, w \Vdash \neg\neg(A \vee \neg A)$. Niinpä $\vdash_{\mathcal{S}} \neg\neg(A \vee \neg A)$ täydellisyyslauseen perusteella.

(Todistus ilman täydellisyyslausetta olisi varsin työläs.)