Modaalilogiikka, harjoitus 11 (2.12.2015)
Ratkaisuja

Taneli Huuskonen

1. Todistetaan induktiolla kaavan A rakenteen suhteen, että kaikille $w \in W$ pätee $M', w \Vdash A$ joss $M, w \models A^*$.

   $1°$ $A = p \in \mathbb{V}$:

   $$M', w \Vdash p \Leftrightarrow w \in P'(p) \Leftrightarrow M, w \models \Box\, p \Leftrightarrow M, w \models p^*$$

   $2°$ $A = B \wedge C$:

   $$\begin{array}{lll} M', w \Vdash B \wedge C & \text{joss} & M', w \Vdash B \text{ ja } M', w \Vdash C \\ & \text{joss} & M, w \models B^* \text{ ja } M, w \models C^* \\ & \text{joss} & M, w \models (B \wedge C)^* \end{array}$$

   $3°$ $A = B \vee C$:

   $$\begin{array}{lll} M', w \Vdash B \vee C & \text{joss} & M', w \Vdash B \text{ tai } M', w \Vdash C \\ & \text{joss} & M, w \models B^* \text{ tai } M, w \models C^* \\ & \text{joss} & M, w \models (B \vee C)^* \end{array}$$

   $4°$ $A = \neg B$:

   $$\begin{array}{lll} M', w \Vdash \neg B & \text{joss} & \forall w' \in W \colon w\, R\, w' \Rightarrow M', w' \nVdash B \\ & \text{joss} & \forall w' \in W \colon w\, R\, w' \Rightarrow M, w' \not\models B^* \\ & \text{joss} & M, w \models \Box\, \neg B^* \\ & \text{joss} & M, w \models (\neg B)^* \end{array}$$

5° $A = B \to C$:

$$\begin{aligned}
M', w \Vdash B \to C \quad & \text{joss} \quad \forall w' \in W \colon w \, R \, w' \;\&\; M', w' \Vdash B \Rightarrow M', w' \Vdash C \\
& \text{joss} \quad \forall w' \in W \colon w \, R \, w' \;\&\; M, w' \models B^* \Rightarrow M, w' \models C^* \\
& \text{joss} \quad \forall w' \in W \colon w \, R \, w' \Rightarrow M, w' \models B^* \to C^* \\
& \text{joss} \quad M, w \models \Box(B^* \to C^*) \\
& \text{joss} \quad M, w \models (B \to C)^*
\end{aligned}$$

2. Olkoon P' kuten edellisessä tehtävässä. Tällöin kaikille $p \in \mathbb{V}$ ja $w \in W$ pätee $w \in P'(p)$ joss $M, w \models \Box p$ joss $\forall w' \colon w \, R \, w' \Rightarrow w' \in P(p)$ joss $w \in P(p)$, joten $P' = P$ ja siis $M' = M$. Niinpä edellisen tehtävän perusteella kaikille kaavoille A ja kaikille $w \in W$ pätee $M, w \Vdash A$ joss $M', w \models A^*$ joss $M, w \models A^*$.

3. Olkoon $M = \langle W, R, P \rangle$ intuitionistinen K-malli, ja olkoon $w \in W$. Olkoon $w' \in W$ sellainen, että $w \, R \, w'$ ja että $M, w' \Vdash A \to \neg A$. Olkoon $w'' \in W$ sellainen, että $w' \, R \, w''$. Oletetaan, että $M, w'' \Vdash A$. Tällöin $M, w'' \Vdash \neg A$, koska $M, w' \Vdash A \to \neg A$. Koska $w'' \, R \, w''$, niin $M, w'' \nVdash A$, mikä on ristiriidassa oletuksen kanssa. Niinpä $M, w'' \nVdash A$. Tämä on voimassa kaikille w'', joilla $w' \, R \, w''$, joten $M, w' \Vdash \neg A$. Siispä $M, w \Vdash (A \to \neg A) \to \neg A$.

4. Olkoon $M = \langle W, R, P \rangle$ intuitionistinen malli, ja olkoon $w \in W$. Olkoon $w' \in W$ sellainen, että $w \, R \, w'$ ja $M, w' \Vdash A \to \neg B$. Halutaan osoittaa, että $M, w' \Vdash B \to \neg A$. Olkoon siis $w'' \in W$ sellainen, että $w' \, R \, w''$ ja $M, w'' \Vdash B$. Tehdään vastaoletus: $M, w'' \nVdash \neg A$. On siis olemassa sellainen $w''' \in W$, että $w'' \, R \, w'''$ ja $M, w''' \Vdash A$. Tällöin relaation R transitiivisuuden nojalla $w' \, R \, w'''$. Lisäksi $M, w' \Vdash A \to \neg B$, joten $M, w''' \Vdash \neg B$. Siispä relaation R refleksiivisyyden perusteella erityisesti $M, w''' \nVdash B$. Tämä on mahdotonta luennoilla todistetun lauseen mukaan, koska $M, w'' \Vdash B$ ja $w'' \, R \, w'''$.

5. Olkoon $M = \langle W, R, P \rangle$, missä

$$\begin{aligned}
W &= \{1, 2\}, \\
R &= \{\langle 1, 1\rangle, \langle 1, 2\rangle, \langle 2, 2\rangle\}, \\
P(p_i) &= \begin{cases} \{2\}, & \text{jos } i = 1, \\ \emptyset, & \text{muuten.} \end{cases}
\end{aligned}$$

Nyt $M, 2 \Vdash p_1$, joten $M, w \nVdash \neg p_1$ kaikilla $w \in W$. Siispä erityisesti $M, 1 \Vdash \neg\neg p_1$. Toisaalta $M, 1 \nVdash p_1$, vaikka $1\, R\, 1$, joten $M, 1 \nVdash \neg\neg p_1 \to p_1$. Niinpä $M \nVdash \neg\neg p_1 \to p_1$.

6. Olkoon M kuten edellisessä ratkaisussa. Edellä todettiin, että $M, w \nVdash \neg p_1$ kaikilla $w \in W$, joten $M, 1 \Vdash \neg p_1 \to p_1$. Toisaalta $M, 1 \nVdash p_1$, vaikka $1\, R\, 1$, joten $M, 1 \nVdash (\neg p_1 \to p_1) \to p_1$. Niinpä $M \nVdash (\neg p_1 \to p_1) \to p_1$.