Modaalilogiikka, harjoitus 10 (25.11.2015) Ratkaisuja

Taneli Huuskonen

1. Olkoot $w, w' \in W$ sellaiset, että $[w]\, R^f\, [w']$. On siis olemassa sellaiset $w'' \in [w]$ ja $w''' \in [w']$, että $w''\, R\, w'''$. Olkoon B sellainen kaava, että $\Box B \in \Gamma$ ja että $M, w \models \Box B$. Tällöin $M, w'' \models \Box B$, koska $w \sim w''$. Niinpä $M, w''' \models B$, joten $M, w' \models B$, koska $w' \sim w'''$. Siispä $[w] R^F [w']$.

2. Olkoot $w, w', w'' \in W$ sellaiset, että $[w] R^F [w']$ ja $[w'] R^F [w'']$. Olkoon B sellainen kaava, että $\Box B \in \Gamma$ ja $M, w \models \Box B$. Tällöin myös $\Box \Box B \in \Gamma$, koska Γ on sulkeinen operaattorin $\Box$ suhteen. Lisäksi $M, w \models \Box \Box B$, koska R on transitiivinen. Niinpä $w' \models \Box B$ ja edelleen $w'' \models B$, koska $[w]\, R^F\, [w']$ ja $[w']\, R^F\, [w'']$. Siis $[w]\, R^F\, [w'']$.

3. Olkoot $w, w', w'' \in W$ sellaiset, että $[w]\, R^F\, [w']$ ja $[w]\, R^F\, [w'']$. Tehdään vastaoletus: $[w']\, \not R^F\, [w'']$. Olkoon B sellainen kaava, että $\Box B \in \Gamma$ ja $M, w' \models \Box B$ mutta $M, w'' \not\models B$. Tällöin $M, w'' \models \neg B$, joten $M, w \models \Diamond \neg B$ ja siis $M, w \models \Box \Diamond \neg B$, koska R on euklidinen. Niinpä $M, w \models \Box \neg \Box B$. Lisäksi $\Box \neg \Box B \in \Gamma$, koska Γ on sulkeinen negaation ja operaattorin $\Box$ suhteen, joten $M, w' \models \neg \Box B$, koska $[w]\, R^F\, [w']$. Tämä on ristiriidassa oletuksen kanssa, joten vastaoletus on väärä. Siispä R^F on euklidinen.

4. "$\rightarrow$": Olkoon $w \in W$ sellainen, että $M, w \models \Diamond \Diamond \Diamond A$. Tällöin on siis olemassa sellainen $w' \in W$, että $w\, R\, w'$ ja että $M, w' \models \Diamond \Diamond A$. Vastaavasti on edelleen olemassa sellaiset $w'', w''' \in W$, että $w'\, R\, w''$, $w''\, R\, w'''$ ja $M, w''' \models A$. Nyt $w'\, R\, w'$, koska $w\, R\, w'$ ja R on euklidinen. Edelleen euklidisuuden perusteella $w''\, R w'$, koska $w'\, R w'$ ja $w'\, R w''$. Niinpä $w' R w'''$, koska $w'' R w'$ ja $w'' R w'''$. Täten $M, w' \models \Diamond A$ ja $M, w \models \Diamond \Diamond A$. Siispä $M \models \Diamond \Diamond \Diamond A \rightarrow \Diamond \Diamond A$.

   "$\leftarrow$": Olkoon $w \in W$ sellainen, että $M, w \models \Diamond \Diamond A$. Tällöin on olemassa sellainen $w' \in W$, että $w\, R\, w'$ ja $M, w' \models \Diamond A$. Euklidisuuden nojalla $w'\, R\, w'$, joten $M, w' \models \Diamond \Diamond A$ ja siis $M, w \models \Diamond \Diamond \Diamond A$.

5. Annettujen ekvivalenssien nojalla

$$\begin{aligned} A &\equiv_M \Diamond \Box \Diamond \Diamond \Box p_1 \\ &\equiv_M \Diamond \Diamond \Diamond \Box p_1 \\ &\equiv_M \Diamond \Diamond \Box p_1 \\ &\equiv_M \Diamond \Box p_1. \end{aligned}$$

Valitaan siis $B = \Diamond \Box p_1$.

6. Olkoon $M = \langle W, R, P \rangle$, missä

$$\begin{aligned} W &= \mathbb{N}, \\ R &= \{\langle m, n \rangle \mid n < m\}, \\ P(p_i) &= \begin{cases} \{0\}, & \text{kun } i = 1, \\ \emptyset, & \text{muuten.} \end{cases} \end{aligned}$$

Selvästi malli M on transitiivinen. Nyt $\|\Box^n p_1\|^M = \{m \in \mathbb{N} \mid m \leq n\}$ kaikilla $n \in \mathbb{N}$, mikä voidaan todistaa induktiolla. Perustapaus $n = 0$ seuraa suoraan määritelmästä. Oletetaan sitten, että $\|\Box^n p_1\|^M = \{m \in \mathbb{N} \mid m \leq n\}$. Tällöin

$$\begin{aligned} \left\|\Box^{n+1} p_1\right\|^M &= \|\Box \Box^n p_1\|^M \\ &= \{m \in \mathbb{N} \mid \forall k \in \mathbb{N} \colon k < m \Rightarrow k \in \|\Box^n p_1\|^M\} \\ &= \{m \in \mathbb{N} \mid \forall k \in \mathbb{N} \colon k < m \Rightarrow k \leq n\} \\ &= \{m \in \mathbb{N} \mid m \leq n + 1\}. \end{aligned}$$

Niinpä kaikilla $m, n \in \mathbb{N}$, $m \neq n$, pätee $\|\Box^m p_1\|^M \neq \|\Box^n p_1\|^M$ ja siis $\Box^m p_1 \not\equiv_M \Box^n p_1$.