# Modaalilogiikka, harjoitus 1 (9.9.2015) Ratkaisuja

Taneli Huuskonen

1. 
   - Esimerkki 1: $\Box(p_R \to h_R)$
   - Esimerkki 2: $\Box(p_R \to \Box h_R)$
   - Esimerkki 3: $\Box(p_R \to h_R)$

2. Käytetään samoja propositiosymboleja kuin kurssitekstin esimerkissä 2.5. Olkoot

$$
\begin{aligned}
W &= \{0,1,2,3,4,5,6,7\},\\
R &= \{(0,1),(0,2),(0,3),(0,4),(0,5),(0,6),(0,7)\},\\
P(p_i) &= \begin{cases}
\{1,2\}, \text{jos } i=1,\\
\{3,4,5\}, \text{jos } i=2,\\
\{6,7\}, \text{jos } i=3,\\
\{1,2,4\}, \text{jos } i=4,\\
\{3,4,5,7\}, \text{jos } i=5,\\
\{5,6,7\}, \text{jos } i=6,\\
\emptyset, \text{muuten.}
\end{cases}
\end{aligned}
$$

   Maailma 0 on lähtötilanne ennen vaaleja, maailmat 1–7 vastaavat mahdollisia lopullisia hallituskokoonpanoja.

3. Maailma 2 on saavutettavissa jokaisesta maailmasta (myös itsestään), ja $M, 2 \not\models p_1$. Siis missään mallin maailmassa ei ole totta $\Box p_1$, joten erityisesti $M, 1 \not\models \Diamond \Box p_1$.

4. 
   - Esimerkki 1: Lähtötilanteesta katsoen mahdolliset tapaukset, joissa pääministeri on Reunustapuolueesta, ovat taulukon mukaan $p_R, h_R$ ja $p_R, h_R, h_P$. Molemmissa näistä tapauksista Reunustapuolue on hallituksessa. Siis implikaatio $p_R \to h_R$ pätee kaikissa mahdollisissa maailmoissa, jotka ovat saavutettavia lähtötilanteesta.

Tapauksessa $p_R, h_R$, joka on saavutettavissa lähtötilanteessa, implikaatio $p_R \to h_P$ ei päde, joten lähtötilanteessa $\Box(p_R \to h_P)$ ei ole tosi.

- Esimerkki 2: Käytetään kurssitekstin esimerkin 2.5 merkintöjä. Ainoa lähtömaailmasta 0 saavutettava mahdollinen maailma, jossa $p_R$ (eli $p_3$) on tosi, on maailma 3, josta ovat edelleen saavutettavia maailmat 9 ja 10. Kaikissa näissä maailmoissa on tosi $h_R$ (eli $p_6$).

  Maailmasta 0 on saavutettavissa maailma 3, jossa $p_R$ ($p_3$) on tosi, ja tästä edelleen saavutettavissa maailma 9, jossa $h_P$ ($p_5$) on epätosi. Siis $M, 3 \models p_3 \wedge \neg \Box p_5$, joten $M, 0 \not\models \Box(p_3 \to \Box p_5)$.
- Esimerkki 3: Avoinna olevat mahdollisuudet ovat samat kuin esimerkissä 1. Koska tarkasteltavissa kaavoissa ei esiinny sisäkkäisiä modaalioperaattoreita, esimerkin 1 perustelu toimii sellaisenaan.

5. Koska mikään $w'$ ei ole saavutettavissa maailmasta $w$, ei määritelmän mukaan päde $M, w \models \Diamond A$, joten $M, w \models \neg \Diamond A$. Vastaavasti nähdään, että $M, w \models \neg \Diamond \neg A$ eli $M, w \models \Box A$. "Mikään ei ole mahdollista, mutta kaikki on välttämätöntä."

6. (a) $A = p_1 \to p_2 = \neg p_1 \vee p_2 = \neg(\neg\neg p_1 \wedge \neg p_2)$

   (b) Tehdään totuustaulu:

| $p_1$ | $p_2$ | $\neg(\neg\neg p_1 \wedge \neg p_2)$ | $\neg(p_1 \wedge \neg p_2)$ |
|---|---|---|---|
| $t$ | $t$ | **t** $t\,e$ $e\,e$ | **t** $e\,e$ |
| $t$ | $e$ | **e** $t\,e$ $t\,t$ | **e** $t\,t$ |
| $e$ | $t$ | **t** $e\,t$ $e\,e$ | **t** $e\,e$ |
| $e$ | $e$ | **t** $e\,t$ $e\,t$ | **t** $e\,t$ |

Koska totuustaulun lihavoidut sarakkeet ovat samat, kaavat ovat loogisesti ekvivalentit.