

Pienryhmätehtävät 5 - Viikolle 41

- (1) Tutustu graafisesti (piirrä suorakulmio, ja piirrä tai leikkaa siitä osia) summaan

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \dots$$

Miltä sarjan summa vaikuttaa?

- (2) Entä jos otetaan jokin vakio $0 < c < 1$ ja tutkitaan sarjaa

$$1 + 1 \cdot c + 1 \cdot c^2 + 1 \cdot c^3 + \dots$$

Mieti taas geometrisesti, eli leikkaa tai piirrä suorakulmiosta osia.

(Äskeisessä tehtävässä oli $c = \frac{1}{2}$.)

- (3A) Minkälainen sarja syntyy Akilleuksesta ja kilpikonnasta? Akilleus juoksee $10\frac{m}{s}$, kilpikonna $1\frac{m}{s}$ ja etumatkaa kilpikonnalle annetaan $10m$.

Sarjan summaa voidaan lähestyä (esim) kahdella eri tavalla:

- (a) Mitä käy desimaalikehitelmille? Tuleeko rajalla joku reaaliluku? Milloin Akilleus saavuttaa kilpikunnan? (Muista miten desimaaliluvut joissa on toistuva osa muutettiin murtoluvuiksi.)
- (b) Hieman "abstraktimmin".

Hieman kuten muutettiin desimaaliluvut joissa on toistuva osa murtoluvuiksi, voidaan muodostaa yhtälö summalle

$$a + ar + ar^2 + ar^3 + \dots + ar^{n-1},$$

missä a ja r ovat jotain lukuja (esim. $a = 1$ ja $r = 1/2$ aiemmassa tehtävässä.) Merkitään tätä summaa symbolilla S ja lasketaan seuraavasti.

$$\begin{aligned} S &= a + ar + ar^2 + ar^3 + \dots + ar^{n-1}, \\ rS &= ar + ar^2 + ar^3 + ar^4 + \dots + ar^n, \\ S - rS &= a - ar^n, \\ S(1 - r) &= a(1 - r^n), \\ S &= a \frac{1 - r^n}{1 - r}. \end{aligned}$$

Huomaa, että jos $0 < r < 1$, niin termi r^n on **todella** pieni, kun n on iso. Täten, koska [Matematiikan perusopinnot 25op], niin voidaan sanoa että "rajana" saadaan

$$a + ar + ar^2 + ar^3 + \dots + ar^{n-1} + \dots = a \frac{1}{1 - r}.$$

Kokeile tätä kun $a = 1$ ja $r = 1/2$.
Milloin Akilleus saavuttaa kilpikonna?

(3B) Laske funktion

$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1}$$

arvoja pisteen $x = 1$ lähellä. (Nollalla ei saa jakaa, joten arvoa $x = 1$ et saa lausekkeeseen sijoittaa.)

Mitä huomaat?

(4) Luennoilla katsottiin ääretöntä summaa

$$\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \frac{1}{10} + \frac{1}{11} + \frac{1}{12} + \dots$$

jossa oli poistettu summattavista luvut joissa on numero "9".

Tutki sarjaa, josta on poistettu luvut joissa on numero "1", tai joissa esiintyy numerojono "42".

(5) Kirjoita luvut nollasta 32:een binäärilukuina ja heksadesimaalilukuina.

(6) Muuta luku 42_{10}

- (a) binääriluvuksi
- (b) heksadesimaaliluvuksi.

(7) ¹ Herra Thompsonilla on lamppu, jossa on on-off -kytkin. Hän kääntää lampun ensin päälle ja...

- odottaa sitten minuutin ja painaa kytkintä
- odottaa sitten 30 sekuntia ja painaa kytkintä
- odottaa sitten 15 sekuntia ja painaa kytkintä
- odottaa sitten 7,5 sekuntia ja painaa kytkintä
- odottaa sitten 3,75 sekuntia ja painaa kytkintä
- odottaa sitten 1,875 sekuntia ja painaa kytkintä
- ...
- odottaa puolet aikaisemmasta odotusajasta ja painaa kytkintä
- ...

Kuten ollaan huomattu, niin kahden minuutin kuluttua homma on valmis. Onko lamppu silloin päällä vai ei? Entä jos herr Thompson aloittaa lampun ollessa pois päältä?

¹Tämä on taas sellainen "huijaustehtävä" josta opet tykkää.