

Pienryhmätehtävät 2 - Viikolle 38

- (1) Hilbertin hotelli – Herra Hilbertillä on isommanpuoleinen hotelli, jossa on peräti äärettömästi huoneita. Huoneet on onneksi numeroitu tuttuun tyyliin luonnollisilla luvuilla

$$1, 2, 3, 4, 5, \dots, 235346, 23547, 23548, \dots$$

Koska matkailu on muodissa, on herra Hilbertin hotelli tällä hetkellä täyteen buukattu. Mutta...

- (a) Hotellin aulaan saapuu herra Nolla, joka pyytää huonetta. Miten herra Hilbert saa hänet majoitettua?
- (b) Naapurihotellissa (joka on identtinen Hilbertin hotellin kanssa) tapahtuu vedenpaisumus, joten sen äärettömän monta asiakasta saapuvat herra Hilbertin hotellin ovelle. Miten herra Hilbert saa heidät majoitettua?
- (c) Lähistöllä on alkamassa kiinnostava konferenssi, ja pihaan ajaa ääretön määrä busseja, jotka on rekisterikilvissä numeroitu luvuilla

$$1, 2, 3, 4, 5, \dots, 23\ 546, 23\ 547, 23\ 548, \dots$$

Kussakin bussissa on numeroituvan äärettömästi matkustajia. Miten herra Hilbert majoittaa heidät kaikki jo täynnä olevaan hotelliinsa?

- (d) Herra Hilbertiä kiinnostaa, miten monella eri tavalla hänen hotellinsa huoneet voisivat olla varattuina. Hän ei kuitenkaan jaksaa kirjoittaa äärettömän monta lappua, joten hän päättää pyytää, että jokainen hotellin asukas kirjoittaa hänelle yhden ”varausskenaarion”, eli tavan millä huoneet voisivat olla vapaina tai varattuina. Jotta kaikki tapahtuisi kontrolloidusti, kirjoitetaan nämä varausskenaariot paperille jonona ykkösiä ja nollia, jossa n :s ykkönen tai nolla kertoo, onko huone numero n varattu (1) vai vapaa (0). Voiko näin tulla kirjoitetuksi kaikki mahdolliset tavat varata huoneita?

- (2) Tutki, miten seuraavat luvut voidaan esittää murtolukumuodossa.

- (a) $0,11111\dots$
(b) $0,22222\dots$
(c) $0,33333\dots$
(d) $4,11853853853853\dots$
(e) $0,1427272727\dots$
(f) $5,14841841841841\dots$

- (3) Perinteinen matematiikan laitoksen fuksikysymys: Pitääkö yhtälö

$$0,9999999999999999 \dots = 1$$

paikkansa?

- (4) Luennoilla unohdettiin ratkaista eräänlaiset yhtälöt! Emme osaa nimittäin ratkaista yhtälöä $x \cdot x = -1$. Mikä neuvoksi?
- (5) Käytettävissäsi on ainoastaan sakset ja valkoista paperia. Miten voit vakuuttaa kaverisi siitä, että Pythagoran lause pitää paikkansa?

Haastavampi tehtävä liittyen vastaoletukseen

Oheisessa kuvassa Ramin Onni-kissa demonstroi luennolla esitettyä Pythagoraan lausetta. Kuten Onnikin tietää, voi Pythagoralaisten ongelmaa siitä, onko $\sqrt{2}$ murtoluku vai ei lähestyä usealla eri tavalla. Tarkkaillaan taas vastaoletusta. Oletetaan, että on olemassa luonnolliset luvut a ja $b \neq 0$, joille pätee $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$. Osaatko johtaa tästä ristiriidan?

