

Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Matemaattisen analyysin kurssi
Harjoitus 1, 11.9.2015

1. Opiskelija ratkaisee yhtälön $x^6 = x^2$ seuraavasti:
 $x^6 = x^2 \implies \sqrt{x^6} = \sqrt{x^2} \implies x^3 = x \implies x^3 - x = 0$
 $\implies x(x^2 - 1) = 0 \implies x = 0$ tai $x = 1$ tai $x = -1$.
Pohdi implikaatioketjun ja ratkaisun korrektisuutta.
2. Merkitään $n\mathbb{Z} = \{nz \mid z \in \mathbb{Z}\}$ ja $n\mathbb{Z} + m\mathbb{Z} = \{x + y \mid x \in n\mathbb{Z}, y \in m\mathbb{Z}\}$,
kun $n \in \mathbb{N}$ ja $m \in \mathbb{N}$. Esitä joukot $3\mathbb{Z} \cap 5\mathbb{Z}$ ja $3\mathbb{Z} + 5\mathbb{Z}$ yksinkertaisem-
massa muodossa $k\mathbb{Z}$ sopivilla lukujen k valinnoilla.
3. Piirrä xy -tasoon \mathbb{R}^2 seuraavat joukot:
 $A = \{(x, y) \mid x^2 + (y - 1)^2 \leq 4\}$, $B = \{(x, y) \mid x + y \in [0, 1]\}$, $A \cup B$,
 $A \cap B$ ja $A \setminus B$.
4. Montako injektiota $f : \{1, 2, \dots, n\} \rightarrow \{1, 2, \dots, n, n + 1\}$ on olemassa?
5. Olkoon $f : \mathbb{R} \rightarrow [1, \infty[$ kaavan $f(x) = (x^2 + 1)^8$ määrittelemä kuvaus.
Esitä f yhdistettynä funktiona muodossa $f = g \circ h$ valiten sopivia g
ja h . Näytä, että tämän voi tehdä äärettömän monella tavalla. (Neuvo:
Potenssiin korotusta koskevia sääntöjä saa tässä halutessaan käyttää.)
6. Määritä (ilman derivaattaa!) kuvajoukko $f(\mathbb{R})$, kun $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ määri-
tellään kaavalla

$$f(x) = \frac{6x}{x^2 + 4}.$$

Tutki samalla, moniko lähtöjoukon \mathbb{R} luku kuvautuu kullekin kuvajou-
kon $f(\mathbb{R})$ luvulle. (Neuvo: Tarkastele yhtälöä $y = f(x)$, josta saadaan
toisen asteen yhtälö, kun $y \neq 0$.)