Olkoon X joukko, $Y \subseteq X$ ja kaikilla $i \leq n$, $f_i : X^{n_i} \to X$ funktio. Määrittelemme joukon $K(Y, f_0, ..., f_n) \subseteq X$ pienimmäksi $Z \subseteq X$ joka sisältää joukon Y ja on suljettu funktioiden f_i suhteen eli $f_i[Z^{n_i}] \subseteq Z$ (eli $f_i(z_1, ..., z_{n_i}) \in Z$ kaikilla $z_1, ..., z_{n_i} \in Z$ ja kaikilla $i \leq n$).

1 Lemma. *Joukko $K(Y, f_0, ..., f_n)$ on olemassa.*

Todistus. Olkoon $\mathcal{K}$ niiden $Z \subseteq X$ kokoelma, jotka sisältävät Y:n ja ovat suljettuja funktioiden f_i, $i \leq n$, suhteen. Huomaa, että $X \in \mathcal{K}$. Nyt joukko $K(Y, f_0, ..., f_n)$ on kaikkien niiden $x \in X$ kokoelma, jotka kuuluvat jokaiseen $Z \in \mathcal{K}$ eli $K(Y, f_0, ..., f_n) = \bigcap \mathcal{K}$, sillä selvästi tämä joukko sisältyy jokaiseen $Z \in \mathcal{K}$ ja se sisältää joukon Y ja lisäksi se on suljettu funktioiden f_i suhteen: Jos $x_1, ..., x_{n_i} \in \bigcap \mathcal{K}$ ja $Z \in \mathcal{K}$, niin $x_1, ..., x_{n_i} \in Z$ ja koska Z on suljettu f_i:n suhteen, $f_i(x_1, ..., x_{n_i}) \in Z$. Koska tämä pätee kaikilla $Z \in \mathcal{K}$, $f_i(x_1, ..., x_{n_i}) \in \bigcap \mathcal{K}$. □

2 Esimerkki. *Olkoon $(G, \cdot)$ ryhmä, $Y \subseteq G$, $f_0 : G \to G$ sellainen että $f_0(g) = g^{-1}$ ja $f_1 : G^2 \to G$ sellainen että $f_1(g, g') = gg'$. Tällöin (jos $Y \neq \emptyset$) $K(Y, f_0, f_1)$ on Y:n virittämä G:n aliryhmä.*

3 Lemma. *Olkoon P jokin joillain X:n alkioilla mahdollisesti oleva ominaisuus. Oletetaan jokaisella Y:n alkiolla on tämä ominaisuus ja että kaikilla $i \leq n$, jos $x_1, ..., x_{n_i} \in K(Y, f_0, ..., f_n)$ ovat sellaisia, että niillä on ominaisuus P niin myös $f_i(x_1, ..., x_{n_i})$:llä on tämä ominaisuus. Tällöin jokaisella $K(Y, f_0, ..., f_n)$:n alkiolla on ominaisuus P.*

Todistus. Olkoon Z niiden $K(Y, f_0, ..., f_n)$:n alkioiden joukko joilla on ominaisuus P. Tällöin $Z \subseteq K(Y, f_0, ..., f_n) \subseteq X$ sisältää Y:n ja on suljettu funktioiden f_i, $i \leq n$, suhteen. Koska joukko $K(Y, f_0, ..., f_n)$ oli pienin tällainen, $K(Y, f_0, ..., f_n) \subseteq Z$ eli jokaisella joukon $K(Y, f_0, ..., f_n)$ alkiolla on ominaisuus P. □

4 Havainto. *Olkoon $X = \mathbb{N}$, $Y = \{0\}$ ja S luonnollisten lukujen seuraajafunktio. Tällöin $K(Y, S) = \mathbb{N}$. Joten jos halutaan todistaa että jokaisella luonnollisella luvulla on ominaisuus P niin Lemman 3 nojalla riittää näyttää että luvulla 0 on ominaisuus P ja että jos luvulla n on tämä ominaisuus niin se on myös luvulla $S(n) = n + 1$.*

5 Esimerkki. *Jos A on propositiolause, niin $v(A) = o(A)$, missä $v(A)$ tarkoittaa A:ssa esiintyvien vasenten sulkumerkkien lukumäärää ja $o(A)$ tarkoittaa A:ssa esiintyvien oikeiden sulkumerkkien lukumäärää.*

Todistus. Todistetaan väite induktiolla A:n rakenteen suhteen eli käytetään Lemmaa 3.

1. A on propositiosymboli: $v(A) = 0 = o(A)$.
2. $A = \neg B$ ja väite pätee B:lle: $v(A) = v(B) = o(B) = o(A)$.
3. $A = (B \to C)$ ja väite pätee B:lle ja C:lle: $v(A) = 1 + v(B) + v(C) = o(B) + o(C) + 1 = o(A)$. □

Määritellään joukot K_m, $m \in \mathbb{N}$, seuraavasti:

(i) $K_0 = Y$,

(ii) $K_{m+1} = K_m \cup \{f_i(x_1, ..., x_{n_i}) | \; i \leq n, \; x_1, ..., x_{n_i} \in K_m\}$.

6 Lemma. $K(Y, f_0, ..., f_n) = \bigcup_{m=0}^{\infty} K_m$.

Proof. Koska $\bigcup_{m=0}^{\infty} K_m$ sisältää Y:n ja on suljettu funktioiden f_i suhteen $K(Y, f_0, ..., f_n) \subseteq \bigcup_{m=0}^{\infty} K_m$. Riittää siis näyttää, että jokaisella $m \in \mathbb{N}$, $K_m \subseteq K(Y, f_0, ..., f_n)$. Tämä on helppo induktio m:n suhteen:

Jos $m = 0$, tämä on selvää ja jos $K_m \subseteq K(Y, f_0, ..., f_n)$, niin $K_{m+1} \subseteq K(Y, f_0, ..., f_n)$ koska $K(Y, f_0, ..., f_n)$ on suljettu funktioiden f_i suhteen. ▫

Olkoon A joukko, $h : Y \to A$ funktio ja kaikilla $i \leq n$, $h_i : A^{n_i} \to A$ funktio. Määrittelemme funktion $H : K(Y, f_0, ..., f_n) \to A$ seuraavasti:

(*) Jos $x \in Y$, niin $H(x) = h(x)$, ja jos $x = f_i(x_1, ..., x_{n_i})$, niin $H(x) = h_i(H(x_1), ..., H(x_{n_i}))$.

7 Lemma. *Oletetaan, että jos* $x = f_i(x_1, ..., x_{n_i}) = f_j(x'_1, ..., x'_{n_j})$ *ja* $x_1, ..., x_{n_i}, x'_1, ..., x'_{n_j} \in K(Y, f_0, ..., f_n)$, *niin* $x \notin Y$, $i = j$ *ja* $x_k = x'_k$ *kaikilla* $1 \leq k \leq n_i$. *Tällöin ehdon (*) toteuttava funktio* H *on olemassa ja se on yksikäsitteinen.*

Todistus. Määritellään funktiot $H_m : K_m \to A$ siten että

(i) $H_0 = h$,

(ii) $H_{m+1} : K_{m+1} \to A$ on sellainen että $H_{m+1}(x) = H_m(x)$ jos $x \in K_m$ ja muuten $H_{m+1}(x) = h_i(H_m(x_1), ..., H_m(x_{n_i}))$, missä $i \leq n$ ja $x_1, ..., x_{n_i} \in K_m$ ovat ne yksikäsitteiset alkiot joilla $x = f_i(x_1, ..., x_{n_i})$.

Tällöin asetamme $H(x) = H_m(x)$ missä m on pienin jolla $x \in K_m$. Yksikäsitteisyysoletuksesta seuraa välittömästi että näin määritelty H toteuttaa ehdon (*).

Näytämme sitten, että H on yksikäsitteinen. Tätä varten olkoon H' toinen ehdon (*) toteuttava funktio. Induktiolla eli Lemman 3 avulla näytämme, että kaikilla $x \in K(Y, f_0, ..., f_n)$, $H'(x) = H(x)$.

Jos $x \in Y$, väite on selvä. Oletetaan sitten että $x = f_i(x_1, ..., x_{n_i})$ ja että väite pätee alkioille $x_1, ..., x_{n_i}$. Tällöin siis $H'(x_k) = H(x_k)$ kaikilla $1 \leq k \leq n_i$. Koska H' ja H toteuttavat ehdon (*), $H'(x) = h_i(H'(x_1), ..., H'(x_{n_i})) = h_i(H(x_1), ..., H(x_{n_i})) = H(x)$. ▫