Matemaattinen logiikka

Harjoitus 9

1. Näytä, että funktio $\pi : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$, $\pi(x,y) = ((x+y)^2 + 3x + y)/2$, on bijektio.

2. Oletetaan, että $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ on vähenevä (eli $f(n) \leq f(m)$ kun $n \geq m$). Näytä, että f on primitiivirekursiivinen.

3. Oletetaan, että $g, h : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ ovat primitiivirekursiivisiä ja että $g(0) = 0$ ja jos $n > 0$ niin $g(n) < n$. Määritellään funktio $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ siten, että $f(n) = 0$ jos $n = 0$ ja muuten $f(n) = h(f(g(n)))$. Näytä, että f on primitiivirekursiivinen.

4. Määritellään rekursiolla sanat:
(i) 010 on sana,
(ii) 0101 on sana,
(iii) jos A ja B ovat sanoja, niin $AB1$ on sana
(eli esim. 01001011 on sana). Näytä, että

$$X = \{n \in \mathbb{N} |\ (n)_0 (n)_1 ... (n)_{(len(n) \dot{-} 1)} \text{ on sana}\}$$

on primitiivirekursiivinen relaatio. Tehtävässä voi pitää tunnettuna, että relaatio $R \subseteq \mathbb{N}^3$ on primitiivirekursiivinen kun $(a,b,c) \in R$ jos $len(c) = len(a) + len(b)$, kaikilla $i < len(a)$, $(c)_i = (a)_i$ ja kaikilla $i < len(b)$, $(c)_{len(a)+i} = (b)_i$.

5. Määritellään alkeellisten funktioiden perhe seuraavasti:
(i) funktiot S, Z, Pr_i^n ja $a(x,y) = x + y$ ovat alkeellisia,
(ii) Jos $f : \mathbb{N}^n \to \mathbb{N}$ ja $g_i : \mathbb{N}^m \to \mathbb{N}$, $1 \leq i \leq n$, ovat alkeellisia, niin myös $h(x_1, .., x_m) = f(g_1(x_1, .., x_m), ..., g_n(x_1, .., x_m))$ on alkeellinen.
Näytä, että kertolasku ei ole alkeellinen. Vihje: Tarkastele alkeellisten funktioiden kasvunopeutta.

6. Olkoon $R \subseteq \mathbb{N}^2$ rekursiivinen relaatio, jolla kaikilla $n \in \mathbb{N}$ löytyy äärettömän monta $m \in \mathbb{N}$ niin, että $(n,m) \in R$. Näytä, että löytyy rekursiivinen injektio $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, jolla $(n, f(n)) \in R$ kaikilla $n \in \mathbb{N}$.