Matemaattinen logiikka

Harjoitus 8

1. Olkoon ϕ lause joka sanoo, että E on ekvivalenssirelaatio ja kaikilla $n \in \mathbb{N}$, olkoon

$$\phi_n = \forall v_0 .... \forall v_n \exists v_{n+1} \exists v_{n+2} ((\bigwedge_{i \le n} \neg v_{n+1} = v_i) \wedge E(v_{n+1}, v_0) \wedge (\bigwedge_{i \le n} \neg E(v_{n+2}, v_i))).$$

Näytä, että $T = \{\phi\} \cup \{\phi_n | \ n \in \mathbb{N}\}$ on täydellinen.

2. Olkoon $M = (\mathbb{N}, f^M)$, missä f^M on sellainen, että kaikilla $n \in \mathbb{N}$, $f^M(2n) = 2n+1$ ja $f^M(2n+1) = 2n$. Etsi lause ϕ jolla on seuraavat ominaisuudet: $M \models \phi$ ja $\{\phi\} \cup \{\psi_n | \ n \in \mathbb{N}\}$ on täydellinen, missä $\psi_n = \forall v_0 ... \forall v_n \exists v_{n+1} \bigwedge_{i \le n} \neg v_i = v_{n+1}$.

3. Olkoon $\mathcal{N} = (\mathbb{N}, +, \times, 0, 1)$ lukuteorian standardimalli ja $M \models PA$. Näytä, että $f : \mathcal{N} \to M$, $f(n) = \underline{n}^M$, on upotus, eli surjektiivisuutta lukuun ottamatta, f toteuttaa isomorfismin vaatimukset. (Vakiotermit $\underline{n}$ määriteltiin seuraavasti: $\underline{0} = 0$ ja $\underline{n+1} = \underline{n} + 1$.)

4. Olkoon $\mathcal{N}$ kuten edellisessä tehtävässä ja $T = Th(\mathcal{N})$ (eli ns. tosi aritmetiikka). Näytä, että T:llä on numeroituva malli M, jossa on alkiot $a_i \in M$, $i \in \mathbb{N}$, joilla kaikilla $i \in \mathbb{N}$, $a_{i+1} + 1 = a_i$. Päättele tästä, että T ei ole $\aleph_0$-kategorinen.

5. Näytä, että funktiot $c(y, x) = x^y$ ja $C_k(x) = k$, $k \in \mathbb{N}$, ovat primitiivirekursiivisiä.

6. Näytä, että funktio $min(x_1, ..., x_n)$ = pienin luvuista $x_1, ..., x_n$ on primitiivirekursiivinen.