Matemaatinen Logiikka

Harjoitus 7

1. Olkoon $\mathcal{T}$ perhe ristiriidattomia L-teorioita siten että kaikilla $T, T' \in \mathcal{T}$ löytyy $T'' \in \mathcal{T}$ jolla $T \cup T' \subseteq T''$. Näytä, että perheen $\mathcal{T}$ teorioiden yhdiste on ristiriidaton.

2. Olkoon T L-teoria siten, että jokaisessa L-struktuurissa ainakin jokin $\phi \in T$ on tosi. Osoita, että on olemassa $\phi_0, ..., \phi_n \in T$, $n \in \mathbb{N}$, siten, että $\vdash \phi_0 \vee ... \vee \phi_n$.

3. Olkoon K kunta. Sanotaan, että K:n karakteristika on $p \in \mathbb{N}$, jos p on pienin $n > 0$ jolla $n.1 = 0$, missä $1.1 = 1$ ja $(n+1).1 = n.1 + 1$. Jos tällaista p ei ole olemassa, sanotaan että K:n karakteristika on 0. Fakta: Karakteristika on aina joko 0 tai alkuluku ja jokaisella alkuluvulla p löytyy kunta jonka karakteristika on p. Näytä, että jos ϕ on totta jokaisessa karakteristikaa 0 olevassa kunnassa, niin löytyy $n \in \mathbb{N}$ jolla ϕ on totta jokaisessa karakteristikaa $p > n$ olevassa kunnassa.

4. Jos $X \subseteq \mathbb{N}$, niin merkitään $[X]^2 = \{(a,b) | \ a, b \in X, \ a < b\}$. Oletetaan tunnetuksi seuraava äärettömän Ramseyn lauseen erikoistapaus: Jos $f : [\mathbb{N}]^2 \to \{0,1\}$, niin löytyy ääretön $X \subseteq \mathbb{N}$ jolla $f \restriction [X]^2$ on vakiofunktio. Näytä, että jokaisella $n \in \mathbb{N}$ löytyy $m \in \mathbb{N}$, jolla on seuraava ominaisuus: Kaikilla $f : [\{0, ..., m\}]^2 \to \{0,1\}$ löytyy joukko $X \subseteq \{0, ..., m\}$, jossa on vähintäin n alkiota ja jolla $f \restriction [X]^2$ on vakiofunktio.

5. Olkoon T_0 ristiriidaton L_0-teoria ja T_1 ristiriidaton L_1-teoria. Oletetaan, että $L_0 \cap L_1 = \emptyset$. Milloin $T_0 \cup T_1$ on ristiriidaton $L_0 \cup L_1$-teoria?

6. Olkoon $M = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} (\{n\} \times \{m \in \mathbb{N} | m \leq n\})$ ja $E \subseteq M^2$ sellainen, että $((n,m),(n',m')) \in E$ jos $n = n'$. Näytä, että $Th((M,E))$ ei ole $\aleph_0$-kategorinen.