

Matemaattinen Logiikka

Harjoitus 5

1. Olkoon $M = \{(n, m) \in \mathbb{N}^2 \mid m \leq n < 57\}$ ja $E \subseteq M^2$ s.e. $((n, m), (k, l)) \in E$ jos $n = k$. Mitkä ovat struktuurin (M, E) määriteltävät osajoukot?
2. Olkoon $\phi = \forall v_0(\exists v_1 R(v_1, v_2) \rightarrow \forall v_2(R(v_1, v_2) \rightarrow R(v_0, v_2)))$. Päteekö
 - (a) $SMK(f(v_2, v_1), v_0, \phi)$,
 - (b) $SMK(f(v_0, v_0), v_2, \phi)$,
 - (c) $SMK(f(v_0, v_1), v_1, \phi)$?
3. Näytä, että $\vdash \forall v_0(\phi \vee \psi) \rightarrow (\forall v_0 \phi \vee \psi)$, kun v_0 ei esiinny ψ :ssä vapaana.
4. Näytä, että $\{\forall v_0(\phi \rightarrow \psi)\} \vdash \exists v_0 \phi \rightarrow \exists v_0 \psi$.
5. Näytä, että $\{\forall v_0 \forall v_1(v_0 = v_1)\} \vdash \exists v_0 P(v_0) \rightarrow \forall v_1 P(v_1)$.
6. Olkoon A propositiologiikan kaava, joka on tautologia ja jossa esiintyy vain propositiosymboleita p_0, \dots, p_n . Olkoot ϕ_0, \dots, ϕ_n L -kaavoja ja ϕ L -kaava, joka on saatu A :sta korvaamalla propositiosymbolit p_i , $i \leq n$, L -kaavoilla ϕ_i . Näytä, että $\vdash \phi$.