

## Matemaattinen logiikka

### Harjoitus 4

1. Olkoon  $A$  tautologia, jossa esiintyy vain propositiosymboleja  $p_0, \dots, p_n$  ja olkoot  $\phi_0, \dots, \phi_n$   $L$ -kaavoja. Näytä, että jos  $\phi$  on merkkijono, joka on saatu  $A$ :sta korvaamalla propositiosymbolit  $p_i$   $L$ -kaavoilla  $\phi_i$ ,  $i \leq n$ , niin  $\phi$  on validi.
2. Näytä, että  $\{\forall v_0(\phi \rightarrow \psi)\} \models \exists v_0\phi \rightarrow \exists v_0\psi$ .
3. Näytä, että  $\forall v_0\forall v_1 v_0 = v_1 \rightarrow (\exists v_0 R(v_0) \rightarrow \forall v_0 R(v_0))$  on validi
4. Onko kaava  $\exists v_0(R(v_0) \rightarrow \forall v_0 R(v_0))$  validi?
5. Olkoon  $G = (G, +)$  Abelin ryhmä. Näytä, että  $f : G \rightarrow G$ ,  $f(x) = -x$  on  $G$ :n automorfismi. Löydätkö ryhmää  $G = (G, \times)$  niin että  $x \mapsto x^{-1}$  ei ole  $G$ :n automorfismi.
6. Tarkastellaan monisteen sivulla 36 olevaa verkkoa  $(G, R)$ . Onko alkio 8 määriteltävä tässä verkossa? Entä 10?