Matemaattinen logiikka

Harjoitus 3

1. Olkoon M epätyhjä joukko ja f ja g bijektioita $M \to M$. Näytä, että f on struktuurin (M, g) automorfismi jos ja vain jos g on struktuurin (M, f) automorfismi.

2. Olkoon $S : \mathbf{Z} \to \mathbf{Z}$ sellainen, että $S(z) = z + 1$ kaikilla $z \in \mathbf{Z}$. Näytä, että struktuurin $(\mathbf{Z}, S)$ automorfismiryhmä $(Aut((\mathbf{Z}, S)), \circ)$ on isomorfinen ryhmän $(\mathbf{Z}, +)$ kanssa.

3. Olkoon $M = (\{0, 1, 2, 3\}, E)$, missä

$$E = \{(0, 1), (1, 0), (1, 2), (2, 1), (2, 3), (3, 2), (3, 0), (0, 3)\}.$$

Laske M:n automorfismien lukumäärä.

4. Olkoon A propositiolause, jossa esiintyy vain propositiosymboleja $p_0, ..., p_n$ ja olkoot $\phi_0, ..., \phi_n$ L-kaavoja. Näytä, että jos ϕ on merkkijono, joka on saatu A:sta korvaamalla propositiosymbolit p_i L-kaavoilla ϕ_i, $i \leq n$, niin ϕ on L-kaava.

5. Olkoon $L = \{R\}$, missä R on 2-paikkainen relaatiosymboli, ja $M = (M, R^M)$ L-struktuuri. Näytä, että R^M on symmetrinen relaatio jos ja vain jos

$$M \models \forall v_0 \forall v_1 (R(v_0, v_1) \to R(v_1, v_0)).$$

6. Onko kaava $\forall v_0 R(v_0, f(v_0)) \to \forall v_0 \exists v_1 R(v_0, v_1)$ validi?