

Matemaattinen Logiikka

Harjoitus 2

1. (i) Näytä, että $\{p_0 \rightarrow (p_1 \rightarrow p_2)\} \not\vdash (p_0 \rightarrow p_1) \rightarrow p_2$.
(ii) Näytä, että jos $\{A \rightarrow B\} \vdash B \rightarrow A$, niin $\vdash B \rightarrow A$ (täydellisyyslausetta saa käyttää).

2. Näytä käyttämättä täydellisyyslausetta, että

$$\vdash A \rightarrow (\neg B \rightarrow \neg(A \rightarrow B)).$$

3. Olkoon $X \subseteq \mathbb{N}$ ja $S = \{p_i \mid i \in X\} \cup \{\neg p_i \mid i \in \mathbb{N} - X\}$. Näytä, käyttämättä täydellisyyslausetta, että S on täydellinen.

4. Näytä, että jos kaikilla propositiosymboleilla p_i , jotka esiintyvät propositiolauseessa A , $v(p_i) = v'(p_i)$, niin $v(A) = v'(A)$.

5. Olkoon T kaikkien totuusjakaumien joukko ja T^* niiden funktioiden $g : \text{dom}(g) \rightarrow \{0, 1\}$ joukko, joiden lähtöjoukko $\text{dom}(g)$ on äärellinen luonnollisten lukujen joukon osajoukko. Kaikilla $g \in T^*$, olkoon N_g niiden totuusjakaumien v joukko, joilla kaikilla $n \in \text{dom}(g)$, $v(n) = g(n)$. Näytä, että jos kaikilla $i \in \mathbb{N}$, $g_i \in T^*$ ja $\bigcup_{i \in \mathbb{N}} N_{g_i} = T$, niin löytyy $m \in \mathbb{N}$ jolla $\bigcup_{i < m} N_{g_i} = T$.

6. Ovatko struktuurit $(\mathbf{Z}, +)$ ja $(\mathbf{Q}, +)$ isomorfiset?