Matemaattinen logiikka

Harjoitus 12

Tehtävissä 1-4, $L = \emptyset$ ja koska $L \subseteq L_{exp}$, käytämme $L$-kaavoille samaa Gödel-numerointia kuin $L_{\rm exp}$-kaavoille.

1.

(i) Näytä, että $L$-kaavojen Gödel-lukujen joukko on primitiivirekursiivinen.

(ii) Kaikilla $n \in \mathbb{N}$, olkoon

$$\phi_n = \exists v_0 ... \exists v_n ((\bigwedge_{i<j\leq n} \neg v_i = v_j) \wedge \forall v_{n+1} (\bigvee_{i\leq n} v_i = v_{n+1})).$$

Näytä, että funktio $F(n) = \ulcorner \phi_n \urcorner$ on primitiivirekursiivinen.

2. Olkoon $A \subseteq \mathbb{N}$ sellainen, että $\pi(n, m) \in A$ jos jollain $L$-lauseella $\psi$, $m = \ulcorner \psi \urcorner$ ja kaikilla $k \leq n$, $\{\phi_k\} \vdash \psi$, missä $\phi_k$ on kuten tehtävässä 1. Näytä, että $A$ on rekursiivisesti numeroituva.

3. Olkoon $E \subseteq \mathbb{N}$ sellainen että $\pi(n, m) \in A$ jos jollain $L$-lauseella $\psi$, $m = \ulcorner \psi \urcorner$ ja jollain $k \leq n$, $\{\phi_k\} \vdash \neg\psi$, missä $\phi_k$ on kuten tehtävässä 1. Näytä, että $E$ on rekursiivisesti numeroituva.

4. Oletetaan tunnetuksi, että kaikilla $L$-lauseilla $\phi$, $\phi$ on validi jos $\phi$ on totta jokaisessa $L$-struktuurissa, jonka koko on enintäin $\ulcorner \phi \urcorner$. Näytä, että validien $L$-lauseiden Gödel-lukujen joukko on rekursiivinen.

5. Olkoon $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ rekursiivinen ja $A$ niiden $n \in \mathbb{N}$ joukko, joilla on olemassa $> n$ monta sellaista $m \in \mathbb{N}$, että $f(m) = n$. Näytä, että $A$ on rekursiivisesti numeroituva.

6. Näytä, että joukko

$$\{\ulcorner \phi \urcorner |\ PA_{exp} \not\vdash \phi,\ PA_{exp} \not\vdash \neg\phi,\ \phi\ L_{exp} - \text{lause}\}$$

ei ole rekursiivisesti numeroituva. Tehtävässä voi pitää tunnettuna, että joukko $\{\ulcorner \phi \urcorner |\ PA_{exp} \vdash \phi,\ \phi\ L_{exp} - \text{lause}\}$ ei ole rekursiivinen.