Matemaattinen logiikka

Harjoitus 11

1. Olkoon $f : \mathbb{N}^5 \to \mathbb{N}$ rekursiivinen. Näytä, että $rng(f)$ on rekursiivisesti numeroituva.

2. Oletetaan, että $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ on rekursiivinen. Näytä, että löytyy L_{exp}-lause ϕ jolla $\mathcal{N}_{exp} \models \phi$ jos ja vain jos $f(\lceil\phi\rceil) = \lceil\phi\rceil$.

3. Oletetaan, että $R \subseteq \mathbb{N}^3$ on rekursiivinen relaatio. Näytä, että relaatio $S \subseteq \mathbb{N}$,

$$x \in S \quad \Leftrightarrow \quad \forall z \leq x \exists y((x, y, z) \in R),$$

on rekursiivisesti numeroituva.

4. Olkoon $S \subseteq \mathbb{N}^2$ sellainen, että $(x, i) \in S$ jos löytyy L_{exp}-kaava ϕ jolla $x = \lceil\phi\rceil$ ja v_i esiintyy vapaana ϕ:ssä.

5. Näytä, että joukko $TA = \{\lceil\phi\rceil \,|\, \mathcal{N}_{exp} \models \phi,\ \phi \text{ on atomilause}\}$ on primitiivirekursiivinen.

6. Näytä, että jokainen ääretön rekursiivisesti numeroituva joukko sisältää äärettömän rekursiivisen joukon. Vihje: Harjoitusten 10 tehtävä 4.