Matemaattinen logiikka

Harjoitus 10

1. Näytä, että funktio $f(x,y) = pyj(x,y)$ (pyj=pienin yhteinen jaettava) ja funktio $g(x,y) = syt(x,y)$ (syt=suurin yhteinen tekijä) ovat primitiivirekursiivisia.

2. Oletetaan, että $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ on rekursiivinen ja merkitään $g^0 = id$ ja $g^{n+1} = g \circ g^n$. Näytä, että $f(n) = g^n(n)$ on rekursiivinen funktio.

3. Olkoon $R \subseteq \mathbb{N}^2$ relaatio, jolla on seuraava ominaisuus: Kaikilla primitiivirekursiivisilla $S \subseteq \mathbb{N}$ löytyy $n \in \mathbb{N}$ niin, että kaikilla $m \in \mathbb{N}$, $m \in S$ jos ja vain jos $(n,m) \in R$. Näytä, että R ei ole primitiivirekursiivinen.

4. Näytä, että ääretön $R \subseteq \mathbb{N}$ on rekursiivinen jos ja vain jos on olemassa aidosti kasvava rekursiivinen funktio $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, jolla $R = \{f(n) |\ n \in \mathbb{N}\}$.

5. Olkoon $N = (\mathbb{N}, +, 0, 1, \leq, f)$ struktuuri, missä $+$ ja $\leq$ ovat luonnollisten lukujen tavalliset yhteenlasku ja järjestys ja $f : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ on sellainen, että kaikilla $k \in \mathbb{N}$ ja $a_0, ..., a_k \in \mathbb{N}$ löytyy $x \in \mathbb{N}$ jolla kaikilla $i \leq k$, $f(x,i) = a_i$. Näytä suoraan määritelmiin vetoamalla, että funktio $h(0) = h(1) = 1$ ja $h(n+2) = h(n) + h(n+1)$ on määriteltävä struktuurissa N.

6. Olkoon $N = (\mathbb{N}, +, 0, 1, \leq, f)$ kuten tehtävässä 5. Näytä suoraan määritelmiin vetoamalla, että funktio $h(n) = 2^n$ on määriteltävä struktuurissa N.