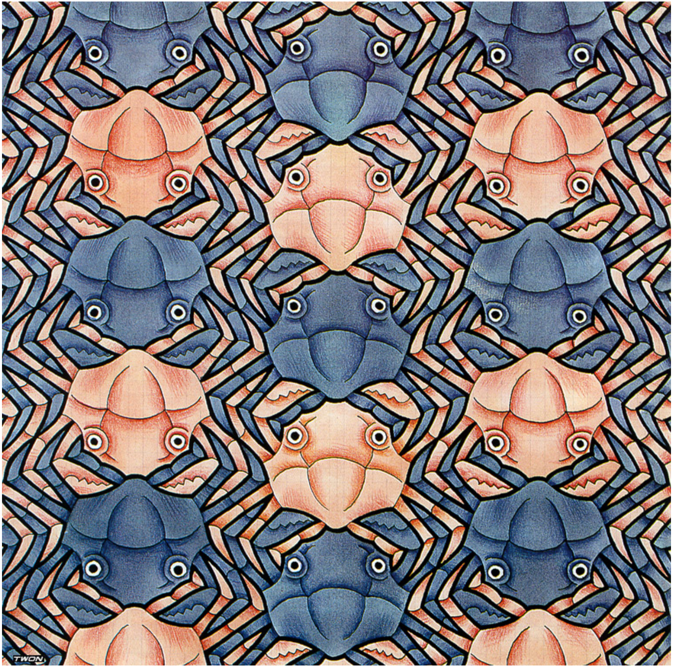
Lineaarialgebra ja matriisilaskenta I

30.11.2015

Helsingin yliopisto
Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Johanna Rämö, johanna.ramo@helsinki.fi

Siirry istumaan toisen ihmisen viereen.

- Esittele itsesi.
- Millaisia peilauksia tai kiertoja kuvalle voi tehdä, niin että se ei muutu niistä miksikään?


TWON

Miten korjaisit ratkaisua?

Osoitetaan, että joukkon $W = \{(a_1, a_2, a_3) \in \mathbb{R}^3 \mid a_1 - 2a_2 - a_3 = 0\}$ alkioiden summa on myöskin joukon W alkio.

Ratkaisu:

$(b_1, b_2, b_3) \in W$.

$(a_1, a_2, a_3) + (b_1, b_2, b_3) = (a_1 + b_1,\ a_2 + b_2,\ a_3 + b_3)$

Koska $a_1 + b_1 - 2(a_2 + b_2) - (a_3 + b_3)$
$= (a_1 - 2a_2 - a_3) + (b_1 - 2b_2 - b_3) = 0 + 0 = 0,$

niin $(a_1, a_2, a_3) + (b_1, b_2, b_3) \in W$.

Olkoon $\mathcal{B}$ jokin kanta.

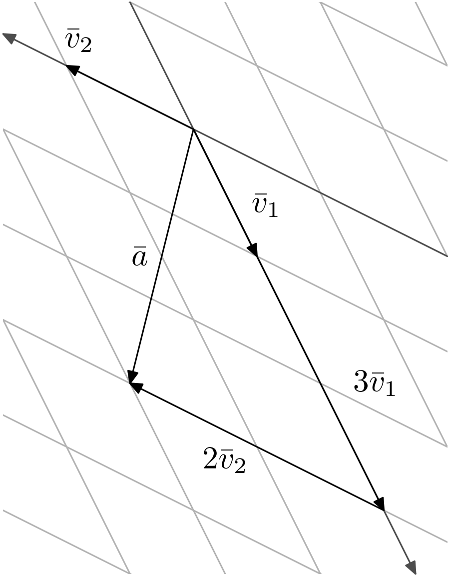
Oletetaan, että $[\bar{v}]_{\mathcal{B}} = (0, 1, -2)$.

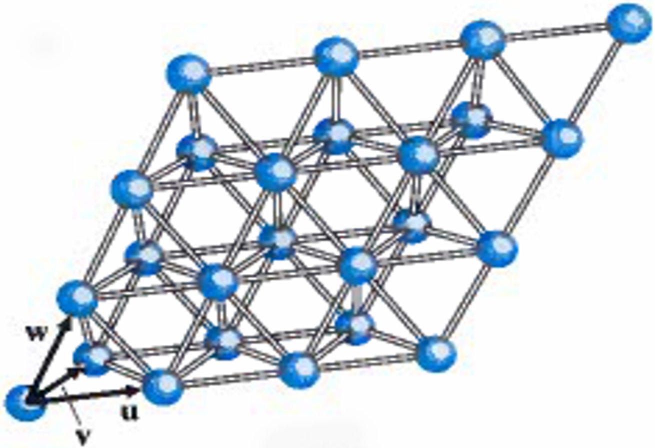
Miltä $\bar{v}$ näyttää? Piirrä siitä kuva tai kuvaile vektoria vieruskaverillesi.

Vektori $\bar{a} = (-1, -4)$.

Merkitään $\bar{v}_1 = (1, -2)$ ja $\bar{v}_2 = (-2, 1)$.

Nyt $\mathcal{B} = (\bar{v}_1, \bar{v}_2)$ on vektoriavaruuden $\mathbb{R}^2$ kanta.


$\bar{v}_2$
$\bar{v}_1$
$\bar{a}$
$3\bar{v}_1$
$2\bar{v}_2$


w
v
u

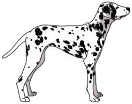
Lineaarikuvauksen ominaisvektoreista muodostuva kanta.

Olkoon $L\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ lineaarikuvaus.

Oletetaan, että kuvauksella L on

- ominaisarvo 4, jota vastaa ominaisvektori $(-4, 3, 1)$
- ominaisarvo -15, jota vastaavat ominaisvektorit $(5, 0, 0)$ ja $(1, 1, -1)$.

Mikä on paras luonnehdinta isomorfismille?



Lineaarikuvaus $L\colon V \to U$ on isomorfismi, jos ja vain jos

(a) se on bijektio.

(b) se on injektio ja surjektio.

(c) $\operatorname{Ker} L = \{\bar{0}\}$ ja $\operatorname{Im} L = U$.

(d) Vektoriavaruuksien välillä oleva isomorfismi tarkoittaa sitä, että avaruudet ovat käytännössä samanlaiset.

Keksi mahdollisimman monta avaruutta, joiden dimensio on 3.

Pistetulon avulla voidaan puhua avaruuden geometrisista ominaisuuksista:

- pituus
- kohtisuoruus
- etäisyys
- jne.

Tutkitaan vektoriavaruutta

$$C([0,1]) = \{f\colon [0,1] \to \mathbb{R} \mid f \text{ on jatkuva}\}.$$

Tässä avaruudessa voi määritellä sisätulon kaavalla $\langle f, g\rangle = \int_0^1 f(x)g(x)\,dx$.

Kuvauksen arviointi toisella, yksinkertaisemmalla kuvauksella.

Käyrän sovittaminen pistejoukkoon.

Erilaista geometriaa

Vektoriavaruuteen $\mathbb{R}^2$ voidaan määritellä sisätulo asettamalla

$$\langle \bar{v}, \bar{w} \rangle = v_1 w_1 + (v_2 w_2)/4.$$

- Miltä näyttävät avaruuden $\mathbb{R}^2$ vektorit, jotka ovat toisiaan vastaan kohtisuorassa?
- Miltä näyttää avaruuden yksikköympyrä?