Lineaarialgebra ja matriisilaskenta I

23.11.2015

Helsingin yliopisto
Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Johanna Rämö, johanna.ramo@helsinki.fi

Siirry istumaan toisen ihmisen viereen.

- Esittele itsesi.
- Mitä ajatuksia kalvolla olevat luvut sinussa herättävät?

Kumpi ratkaisu on parempi?

Tehtävä: Osoita, että kuvaus $L\colon \mathbb{R} \to \mathcal{P}$, $L(a) = ax^2 - a$ on lineaarinen.

Ratkaisu 1:
Oletetaan, että $a, b \in \mathbb{R}$ ja $r \in \mathbb{R}$. Nyt

$$\begin{aligned} L(a+b) &= (a+b)x^2 - (a+b) \\ &= ax^2 - a + bx^2 - b \\ &= L(a) + L(b) \end{aligned}$$

ja

$$L(ra) = (ra)x^2 - (ra) = r(ax^2 - a) = rL(a).$$

Siten L on lineaarikuvaus.

Ratkaisu 2:
On osoitettava, että

(a) $L(a+b) = L(a) + L(b)$ kaikilla $a, b \in \mathbb{R}$ ja
(b) $L(ra) = rL(a)$ kaikilla $r \in \mathbb{R}$ ja $a \in \mathbb{R}$.

Koska

$$\begin{aligned} L(a+b) &= (a+b)x^2 - (a+b) \\ &= ax^2 - a + bx^2 - b \\ &= L(a) + L(b) \end{aligned}$$

ja

$$L(ra) = (ra)x^2 - (ra) = r(ax^2 - a) = rL(a),$$

kuvaus L on lineaarinen.

Ratkaisu 2:
On osoitettava, että

(a) $L(v+w) = L(v) + L(w)$ kaikilla $v, w \in \mathbb{R}$ ja
(b) $L(rv) = rL(v)$ kaikilla $r \in \mathbb{R}$ ja $v \in \mathbb{R}$.

Koska

$$\begin{aligned} L(a+b) &= (a+b)x^2 - (a+b) \\ &= ax^2 - a + bx^2 - b \\ &= L(a) + L(b) \end{aligned}$$

ja

$$L(ra) = (ra)x^2 - (ra) = r(ax^2 - a) = rL(a),$$

kuvaus L on lineaarinen.

https://tube.geogebra.org/m/157957

Venytykset, kierrot, peilaukset

Mitä Homerille on tehty? Ilmaise se venytysten, kiertojen ja peilausten kielellä.

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$BC = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$CB = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Matriisien historia

Kuva

Lineaarikuvaus $L\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ ensin kiertää tason vektoreita 90° astetta myötäpäivään ja sitten projisoi ne suoralle span$((-1,-1))$.

(a) Keksi kolme vektoria, jotka ovat lineaarikuvauksen kuvassa $\operatorname{Im} L$.

(b) Miltä kuva $\operatorname{Im} L$ näyttää?

Ydin

Lineaarikuvaus $L\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ ensin kiertää tason vektoreita 90° astetta myötäpäivään ja sitten projisoi ne suoralle $\mathrm{span}((-1,-1))$.

(a) Keksi kolme vektoria, jotka ovat lineaarikuvauksen ytimessä $\operatorname{Ker} L$.

(b) Miltä ydin $\operatorname{Ker} L$ näyttää?

Ydin on alkukuva.

Mitkä väitteistä pitävät paikkansa?

Lineaarikuvaus $L\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ ensin kiertää tason vektoreita 90° astetta myötäpäivään ja sitten projisoi ne suoralle $\operatorname{span}((-1,-1))$.

(a) Lineaarikuvauksen L matriisin selvittämiseksi riittää laskea $L(\bar{e}_1)$ ja $L(\bar{e}_2)$.

(b) Vektori $(1/2, 2)$ on lineaarikuvauksen L ominaisvektori.

(c) Lineaarikuvauksella L on vain yksi ominaisarvo ja se on 0.

(d) Lineaarikuvauksen L ominaisarvot ovat sen matriisin ominaisarvot.

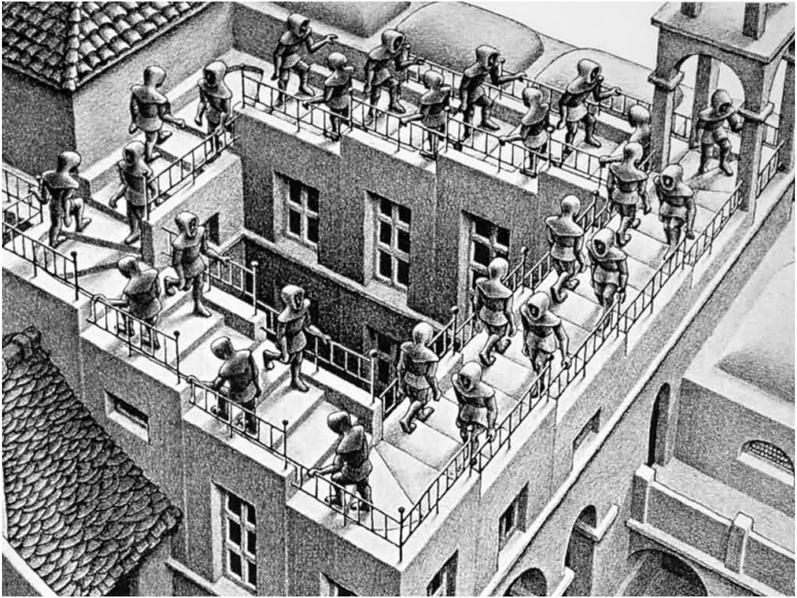
(e) Lineaarikuvauksella L ei ole ominaisvektoreita.

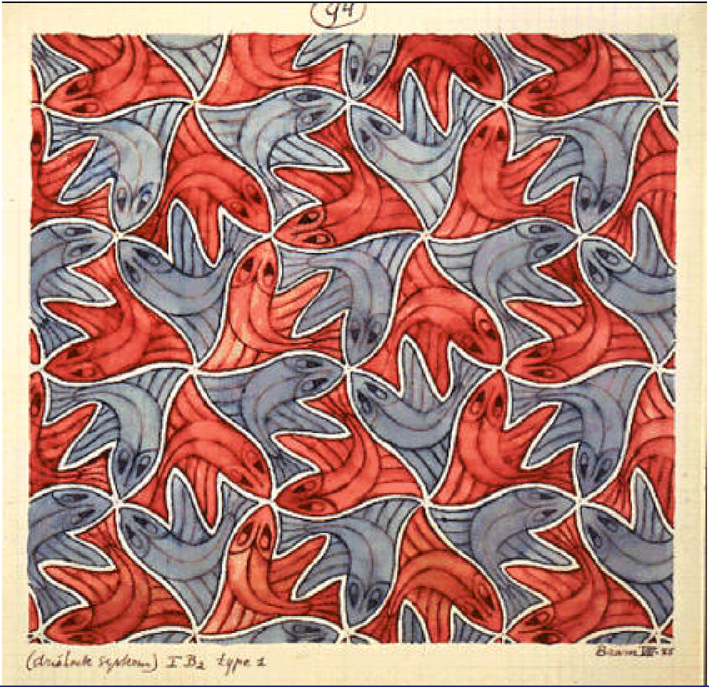
Mene osoitteeseen `presemo.helsinki.fi/joh` ja äänestä.

Miksi lineaarikuvauksen matriisin sarakkeet ovat luonnollisen kannan vektorien kuvavektorit?

Oletetaan, että lineaarikuvauksen L matriisi on

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}.$$




94

Millaiset kierrot ja peilaukset säilyttävät kuvan samanlaisena?
(Väreistä ei tarvitse välittää.)