Lineaarialgebra ja matriisilaskenta I

16.11.2015

Helsingin yliopisto
Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Johanna Rämö, johanna.ramo@helsinki.fi

Käytännön asioita

- Koetulokset ovat ilmestyneet kurssisivulle. Tarkista erityisesti, että lisäpisteesi ovat oikein.
- Tutustu myös ratkaisuehdotukseen.
- Kokeenkatsomistilaisuus järjestetään ke 18.11. klo 11.00-12.00 huoneessa D340.

Entä jos koe meni huonosti?

Siirry istumaan toisen ihmisen viereen.

- Esittele itsesi.
- Kysy vieruskaveriltasi, kuinka hänen viikonloppunsa sujui?

Onko $\mathbb{R}^2$ vektoriavaruuden $\mathbb{R}^3$ aliavaruus?

Itseselittämisen strategia

Todistusta lukiessasi mietin kunkin rivin kohdalla:

- Ymmärränkö rivillä käytetyt ideat?
- Ymmärränkö miksi ideaa käytettiin?
- Millä tavoin idea on yhteydessä muihin todistuksessa käytettyihin ideoihin, muihin lauseisiin tai aiempaan tietämykseeni?
- Auttavatko kehittämäni selitykset minua vastaamaan näihin kysymyksiin?

Lause

Oletetaan, että $(\bar{v}_1, \ldots, \bar{v}_k)$ on vektoriavaruuden V jono, joka on vapaa.

Tällöin jokainen aliavaruuden $W = \operatorname{span}(\bar{v}_1, \ldots, \bar{v}_k)$ alkio voidaan kirjoittaa täsmälleen yhdellä tavalla vektorien $\bar{v}_1, \ldots, \bar{v}_k$ lineaarikombinaationa.

1. Olkoon $w \in W$. Oletetaan, että $\bar{w}$ voidaan kirjoittaa kahdella tavalla:

$$\bar{w} = a_1\bar{v}_1 + \cdots + a_k\bar{v}_k \quad \text{ja}$$
$$\bar{w} = b_1\bar{v}_1 + \cdots + b_k\bar{v}_k,$$

   missä $a_1, \ldots, a_k, b_1, \ldots, b_k \in \mathbb{R}$.

2. Nyt $a_1\bar{v}_1 + \cdots + a_k\bar{v}_k = b_1\bar{v}_1 + \cdots + b_k\bar{v}_k$, joten

$$a_1\bar{v}_1 + \cdots + a_k\bar{v}_k - b_1\bar{v}_1 - \cdots - b_k\bar{v}_k = \bar{0}.$$

3. Siis $(a_1 - b_1)\bar{v}_1 + \cdots + (a_k - b_k)\bar{v}_k = \bar{0}$.
4. Vapauden nojalla $a_1 - b_1 = 0$, ..., $a_k - b_k = 0$.
5. Näin ollen $a_1 = b_1$, ..., $a_k = b_k$, joten lineaarikombinaatiot ovat itse asiassa samat.

Mitkä väitteistä ovat tosia?

(a) On olemassa lineaarikuvaus $L\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, jolle pätee $L(1,0) = (2,2,2)$ ja $L(-2,0) = (1,1,1)$.

(b) Oletetaan, että kuvaukselle $L\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ pätee

$$L(1,0) = (2,2,2), \quad L(0,1) = (6,6,1),$$

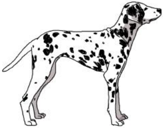
$$L(1,1) = (8,8,3) \quad \text{ja} \quad L(2,0) = (4,4,4).$$

Tällöin kuvaus L on lineaarinen.

(c) On olemassa lineaarikuvaus $L\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, jolle pätee $L(1,0) = (2,2,2)$ ja $L(0,1) = (0,0,0)$.

(d) On olemassa lineaarikuvaus $L\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, jolle pätee $L(1,2) = (2,2,2)$ ja $L(-1,0) = (0,0,0)$.

presemo.helsinki.fi/joh



Lause

Olkoot V ja U vektoriavaruuksia. Oletetaan, että $(\bar{v}_1, \bar{v}_2, \ldots, \bar{v}_n)$ on avaruuden V kanta ja $\bar{u}_1, \bar{u}_2, \ldots, \bar{u}_n \in U$. Tällöin on olemassa täsmälleen yksi lineaarikuvaus $L\colon V \to U$, jolle pätee $L(\bar{v}_i) = \bar{u}_i$ kaikilla $i \in \{1, \ldots, n\}$.

Lineaarikuvaus

Tutkitaan kuvausta $L\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$,

$$L(a,b,c) = (a - b - 4c,\ 12a + 4c,\ -3a - 7b,\ a).$$

- Etsi matriisi, joka määrää kuvauksen L.
- Kuinka monella eri tavalla osaat ratkaista tehtävän?
- Onko kuvaus L lineaarinen?

Lineaarikuvauksen matriisi

Miksi matriisin sarakkeina ovat luonnollisen kannan vektorien kuvavektorit?

https://tube.geogebra.org/m/157957