Lineaarialgebra ja matriisilaskenta I

9.11.2015

Helsingin yliopisto
Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Johanna Rämö, johanna.ramo@helsinki.fi

Käytännön asioita

- Keskiviikkoisin ei enää ole luentoa.
- Koetulokset ovat ilmestyneet kurssisivulle. Tarkista erityisesti, että lisäpisteesi ovat oikein.
- Kokeenkatsomistilaisuus järjestetään ke 11.11. klo 11.00-12.00 huoneessa D340.

Siirry istumaan toisen ihmisen viereen.

- Esittele itsesi.
- Mitä olet oppinut yliopistossa tämän syksyn aikana?
- Mikä on ollut vaikeaa?
- Mikä on ollut antoisaa?

Kurssin kokonaiskuva.

Polynomiavaruudella $\mathcal{P}_2$ on kanta $\mathcal{B} = (1 + x + x^2,\ 4x,\ x^2)$.

Tutkitaan, mikä on polynomin $p = 1 + 5x$ koordinaattivektori tämän kannan suhteen.

Tapa 1: $1 + 5x = 1(1 + x + x^2) + 1(4x) + (-1)x^2$, joten, koordinaattivektori on $[p]_{\mathcal{B}} = (1, 1, -1)$.

Tapa 2: $1 + 5x = 0(1 + x + x^2) + (5/4)(4x) + (1/x^2)x^2$, joten, koordinaattivektori on $[p]_{\mathcal{B}} = (0,\ 5/4,\ 1/x^2)$.

Onko koordinaattivektoreita useita?

Mitkä väitteistä ovat tosia?

Oletetaan, että V on vektoriavaruus, jonka dimensio on 4.

(a) Vektorit $\bar{v}_1$, $\bar{v}_2$ ja $\bar{v}_3$ voivat virittää avaruuden V.

(b) Avaruuden V vektoreista muodostuva jono $(\bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3, \bar{v}_4, \bar{v}_5)$ voi olla vapaa.

(c) Jos vektorit $\bar{v}_1$, $\bar{v}_2$, $\bar{v}_3$ ja $\bar{v}_4$ virittävät avaruuden V, jono $(\bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3, \bar{v}_4)$ on vapaa.

(d) Jos W on vektoriavaruuden V aliavaruus, W:n mikä tahansa kanta voidaan laajentaa V:n kannaksi.

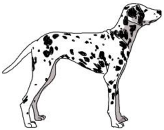
Kanta ja dimensio

Oletetaan, että V on vektoriavaruus, jonka dimensio on n.

- Jos vektoriavaruuden V vektorijono virittää avaruuden ja sen pituus on n, kyseinen jono on kanta.
- Jos vektoriavaruuden V vektorijono on vapaa ja sen pituus on n, kyseinen jono on kanta.

Tutkitaan, onko vektorijono $(\bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3)$ avaruuden $\mathbb{R}^3$ kanta.

Mitä lineaarikuvauksen määritelmä oikein sanoo?



Olkoot V ja U vektoriavaruuksia. Kuvaus $L\colon V \to U$ on lineaarikuvaus, jos seuraavat ehdot pätevät:

(a) $L(\bar{v} + \bar{w}) = L(\bar{v}) + L(\bar{w})$ kaikilla $\bar{v}, \bar{w} \in V$

(b) $L(c\bar{v}) = cL(\bar{v})$ kaikilla $c \in \mathbb{R}$ ja $\bar{v} \in V$.

Kelpuutatko ratkaisun?

Osoita, että kuvaus $L\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $L(x_1, x_2) = (x_1^2, 0)$ ei ole lineaarinen.

Ratkaisu: Oletetaan, että $\bar{v} = (v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2$ ja $\bar{w} = (w_1, w_2) \in \mathbb{R}^2$.
Huomataan, että

$$\begin{aligned} L(\bar{v} + \bar{w}) &= L(v_1 + w_1,\ v_2 + w_2) = ((v_1 + w_1)^2,\ 0) \\ &= (v_1^2 + 2v_1 w_1 + w_1^2,\ 0). \end{aligned}$$

Toisaalta

$$L(\bar{v}) + L(\bar{w}) = (v_1^2, 0) + (w_1^2, 0) = (v_1^2 + w_1^2,\ 0).$$

Koska $(v_1^2 + 2v_1 w_1 + w_1^2,\ 0) \neq (v_1^2 + w_1^2,\ 0)$, kuvaus L ei ole lineaarinen.

Itseselittämisen strategia

Todistusta lukiessasi mietin kunkin rivin kohdalla:

- Ymmärränkö rivillä käytetyt ideat?
- Ymmärränkö miksi ideaa käytettiin?
- Millä tavoin idea on yhteydessä muihin todistuksessa käytettyihin ideoihin, muihin lauseisiin tai aiempaan tietämykseeni?
- Auttavatko kehittämäni selitykset minua vastaamaan näihin kysymyksiin?

Lause

Olkoon A on $m \times n$-matriisi. Matriisin A määräämä kuvaus

$$L_A \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m, \quad L_A(\bar{v}) = A\bar{v}$$

on lineaarikuvaus.

Todistus.

1. Oletetaan, että $\bar{v}, \bar{w} \in \mathbb{R}^n$ ja $c \in \mathbb{R}$.
2. Nyt pätee

$$\begin{aligned} L_A(\bar{v} + \bar{w}) &= A(\bar{v} + \bar{w}) = A\bar{v} + A\bar{w} \\ &= L_A(\bar{v}) + L_A(\bar{w}). \end{aligned}$$

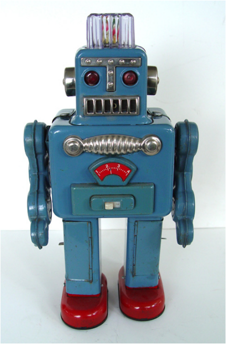
3. Lisäksi pätee

$$L_A(c\bar{v}) = A(c\bar{v}) = c(A\bar{v}) = cL_A(\bar{v}).$$

4. Siten L_A on lineaarinen.

$\square$

Liikutetaan kauko-ohjattavan robotin kättä



Viesti	ylös	alas	vasen	oikea
Koodi	(0,0,0)	(0,1,1)	(1,0,1)	(1,1,0)

Yhteenlasku joukossa $\{0, 1\}$:

- $0 + 0 = 0$
- $0 + 1 = 1$
- $1 + 0 = 1$
- $1 + 1 = 0$

Koodivektorille (c_1, c_2, c_3) pätee $c_1 + c_2 = c_3$.

Liikutetaan leikkiautoa kilparadalla

Viesti	eteen	taakse
Koodi	(0)	(1)

Virheen korjaava koodi

Viesti	eteen	taakse
Alkup. koodi	(0)	(1)
Uusi koodi	(0,0,0)	(1,1,1)

Koodin voi generoida matriisilla

$$G = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Koodin tarkistus

Koodivektorille (c_1, c_2, c_3) pätee

$$\begin{cases} c_1 + c_2 \phantom{{}+ c_3} = 0 \\ c_1 \phantom{{}+ c_2} + c_3 = 0 \end{cases}$$

Tarkistusmatriisi

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$