Lineaarialgebra ja matriisilaskenta I

2.11.2015

Helsingin yliopisto
Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Johanna Rämö, johanna.ramo@helsinki.fi

Etsi itsellesi pari

Siirry istumaan toisen ihmisen viereen.

Jos et tunne pariasi, esittele itsesi. Jos tunnet parisi, tervehdi häntä ja kysy kuulumiset.

Laskutoimitukset

(a) Onko kokonaislukujen tavallinen yhteenlasku joukon $\{0, 1, \ldots, 100\}$ laskutomitus?

(b) Onko kokonaislukujen tavallinen yhteenlasku joukon $\{\ldots, -4, -2, 0, 2, 4, \ldots, 100\}$ laskutomitus?

(c) Voiko joukossa $\mathbb{Z}$ määritellä laskutoimituksen $\oplus$ ehdolla $a \oplus b = (a + b)/2$?

Lisätehtävä: Keksi itse jokin uusi joukon $\mathbb{Z}$ laskutoimitus.

Vektoriavaruus

Oletetaan, että joukossa V on määritelty yhteenlasku ja skalaarikertolasku jollakin tavalla. Jos alla listatut ehdot pätevät kaikilla $\bar{v}, \bar{w}, \bar{u} \in V$ ja $a, b \in \mathbb{R}$, joukkoa V kutsutaan *vektoriavaruudeksi* ja sen alkioita *vektoreiksi*.

1. $\bar{v} + \bar{w} = \bar{w} + \bar{v}$ kaikilla $\bar{v}, \bar{w} \in V$.
2. $(\bar{v} + \bar{w}) + \bar{u} = \bar{v} + (\bar{w} + \bar{u})$ kaikilla $\bar{v}, \bar{w}, \bar{u} \in V$.
3. On olemassa niin kutsuttu *nollavektori* $\bar{0} \in V$, jolle pätee $\bar{v} + \bar{0} = \bar{v}$ kaikilla $\bar{v} \in V$.
4. Jokaisella vektorilla $\bar{v} \in V$ on niin kutsuttu *vastavektori* $-\bar{v} \in V$, jolle pätee $\bar{v} + (-\bar{v}) = \bar{0}$.
5. $a(\bar{v} + \bar{w}) = a\bar{v} + a\bar{w}$ kaikilla $\bar{v}, \bar{w} \in V$ ja $a \in \mathbb{R}$.
6. $(a + b)\bar{v} = a\bar{v} + b\bar{v}$ kaikilla $\bar{v} \in V$ ja $a, b \in \mathbb{R}$.
7. $(ab)\bar{v} = a(b\bar{v})$ kaikilla $\bar{v} \in V$ ja $a, b \in \mathbb{R}$.
8. $1\bar{v} = \bar{v}$ kaikilla $\bar{v} \in V$.

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy \geq 0\}$$

- Onko A vektoriavaruus, kun yhteenlaskuna on vektoreiden tavallinen yhteenlasku ja skalaarikertolaskuna tavallinen skalaarikertolasku?
- Mitkä vektoriavaruuden ehdoista pitää käydä läpi? Mitkä seuraavat automaattisesti siitä, että $A \subset \mathbb{R}^2$?

Äänestä: `presemo.helsinki.fi/joh`.

Joukossa V on määritelty yhteen- ja skalaarikertolasku.

1. $\bar{v} + \bar{w} = \bar{w} + \bar{v}$ kaikilla $\bar{v}, \bar{w} \in V$.
2. $(\bar{v} + \bar{w}) + \bar{u} = \bar{v} + (\bar{w} + \bar{u})$ kaikilla $\bar{v}, \bar{w}, \bar{u} \in V$.
3. On olemassa niin kutsuttu *nollavektori* $\bar{0} \in V$, jolle pätee $\bar{v} + \bar{0} = \bar{v}$ kaikilla $\bar{v} \in V$.
4. Jokaisella vektorilla $\bar{v} \in V$ on niin kutsuttu *vastavektori* $-\bar{v} \in V$, jolle pätee $\bar{v} + (-\bar{v}) = \bar{0}$.
5. $a(\bar{v} + \bar{w}) = a\bar{v} + a\bar{w}$ kaikilla $\bar{v}, \bar{w} \in V$ ja $a \in \mathbb{R}$.
6. $(a + b)\bar{v} = a\bar{v} + b\bar{v}$ kaikilla $\bar{v} \in V$ ja $a, b \in \mathbb{R}$.
7. $(ab)\bar{v} = a(b\bar{v})$ kaikilla $\bar{v} \in V$ ja $a, b \in \mathbb{R}$.
8. $1\bar{v} = \bar{v}$ kaikilla $\bar{v} \in V$.

Joukossa V on määritelty yhteenlasku ja skalaarikertolasku.

1. $\bar{v} + \bar{w} = \bar{w} + \bar{v}$ kaikilla $\bar{v}, \bar{w} \in V$.
2. $(\bar{v} + \bar{w}) + \bar{u} = \bar{v} + (\bar{w} + \bar{u})$ kaikilla $\bar{v}, \bar{w}, \bar{u} \in V$.
3. On olemassa niin kutsuttu *nollavektori* $\bar{0} \in V$, jolle pätee $\bar{v} + \bar{0} = \bar{v}$ kaikilla $\bar{v} \in V$.
4. Jokaisella vektorilla $\bar{v} \in V$ on niin kutsuttu *vastavektori* $-\bar{v} \in V$, jolle pätee $\bar{v} + (-\bar{v}) = \bar{0}$.
5. $a(\bar{v} + \bar{w}) = a\bar{v} + a\bar{w}$ kaikilla $\bar{v}, \bar{w} \in V$ ja $a \in \mathbb{R}$.
6. $(a + b)\bar{v} = a\bar{v} + b\bar{v}$ kaikilla $\bar{v} \in V$ ja $a, b \in \mathbb{R}$.
7. $(ab)\bar{v} = a(b\bar{v})$ kaikilla $\bar{v} \in V$ ja $a, b \in \mathbb{R}$.
8. $1\bar{v} = \bar{v}$ kaikilla $\bar{v} \in V$.

Mikä tekee punaisella maalatuista ehdoista erilaisia?

Milloin osajoukko on vektoriavaruus?

Halutaan tutkia, onko vektoriavaruuden osajoukko vektoriavaruus.
Mitkä vektoriavaruuden ehtoja pitää tutkia?

Aliavaruus

Määritelmä

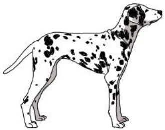
Olkoon V vektoriavaruus. Sen osajoukko W on vektoriavaruuden V *aliavaruus*, jos seuraavat ehdot pätevät:

(a) $\bar{w} + \bar{u} \in W$ kaikilla $\bar{w}, \bar{u} \in W$

(b) $r\bar{w} \in W$ kaikilla $r \in \mathbb{R}$ ja $\bar{w} \in W$

(c) $\bar{0} \in W$.

Aliavaruuden luonnehdinta



Aliavaruus on vektoriavaruus toisen vektoriavaruuden sisässä.
(Laskutoimitusten pitää olla samat.)

Määritellään positiivisten reaalilukujen joukossa $\mathbb{R}_+ = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$ yhteenlasku $\oplus$ ja skalaarikertolasku $\odot$ seuraavasti: jos x, $y \in \mathbb{R}_+$ ja $c \in \mathbb{R}$, niin

$$x \oplus y = x \cdot y \quad \text{ja} \quad c \odot x = x^c.$$

Osoita, että vektoriavaruuden ehto 8 pätee joukolle $\mathbb{R}_+$, kun se varustetaan yhteenlaskulla $\oplus$ ja skalaarikertolasku $\odot$.

Totta vai tarua?

(a) Jos yhtälöryhmän matriisissa on vapaa muuttuja, yhtälöryhmällä on äärettömän monta ratkaisua.

(b) Jos matriisin jokaisessa sarakkeessa on johtava alkio, yhtälöryhmällä on täsmälleen yksi ratkaisu.

(c) Jos yhtälöryhmän matriisi voidaan muuttaa redusoiduksi porrasmatriisiksi, yhtälöryhmällä on täsmälleen yksi ratkaisu.