Lineaarialgebra ja matriisilaskenta II
Helsingin yliopisto, matematiikan ja tilastotieteen laitos
Syksy 2015
Harjoitus 6

Tehtävien viimeinen palautuspäivä: pe 4.12.2015 klo 19.30
Korjausten viimeinen palautuspäivä: pe 18.12.2015 klo 19.30

Tehtäväsarja I

1. Funktioavaruudella $\mathcal{F}$ on aliavaruus $\mathcal{F}_d = \{f \in \mathcal{F} \mid f \text{ on derivoituva}\}$. Lisäksi derivointikuvaus
$$D\colon \mathcal{F}_d \to \mathcal{F}, \quad f \mapsto f'$$
on lineaarikuvaus.
   (a) Määritä seuraavien vektoreiden kuvavektorit kuvauksessa D:
      i. $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^3 - 4x + 6$
      ii. $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = \sin x$.
   (b) Keksi kolme vektoria, jotka ovat ytimen $\operatorname{Ker} D$ alkoita.
   (c) Määritä ydin $\operatorname{Ker} D$.

2.* Tiedetään, että lineaarikuvauksella $L\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ on ominaisarvo $\lambda \in \mathbb{R}$, jota vastaavat ominaisvektorit $\bar{v}_1 = (5, 2, -1, 0)$ ja $\bar{v}_2 = (-2, 0, -3, 4)$. Keksi ominaisarvoa λ vastaava ominaisvektori, joka ei ole yhdensuuntainen kummankaan vektoreista $\bar{v}_1$ ja $\bar{v}_2$ kanssa. Perustele vastauksesi ominaisvektorin määritelmän avulla.

Tehtäväsarja II

Tutustu kurssimateriaalin lukuun 24.3, jossa käsitellään aliavaruuden kohtisuoraa komplementtia. Seuraavissa tehtävissä sisätulona on tavallinen pistetulo ellei toisin mainita.

3. (a) Tutkitaan avaruuden $\mathbb{R}^2$ aliavaruutta $W = \{(2a, 3a) \mid a \in \mathbb{R}\}$. Mitkä seuraavista vektoreista ovat kohtisuorassa komplementissa $W^\perp$?
$$\text{(i) } \bar{v} = (-6, 4) \qquad \text{(ii) } \bar{v} = (1, 1)$$
   (b) Piirrä kuva aliavaruudesta W sekä sen kohtisuorasta komplementista $W^\perp$. Perusteluja ei tarvita.

4. Miltä näyttää seuraavissa tapauksissa avaruuden $\mathbb{R}^3$ aliavaruuden W kohtisuora komplementti $W^\perp$? Tehtävä on tarkoitus ratkaista ilman laskuja, eikä tarkkoja perusteluja ei tarvita.
$$\text{(a) } W = \operatorname{span}((0,2,0),(1,1,0)) \qquad \text{(b) } W = \operatorname{span}((0,2,0)) \qquad \text{(c) } W = \mathbb{R}^3$$
   Lisätehtävä: Perustele vastauksesi huolellisesti ja kirjoita myös mahdolliset laskut näkyviin.

5. Tarkastellaan avaruuden $\mathbb{R}^3$ aliavaruutta $W = \{\bar{x} \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 - 5x_2 + 8x_3 = 0\}$.

   (a) Etsi virittäjät aliavaruudelle W. Miltä aliavaruus W näyttää?
   (b) Keksi vektori $\bar{n} \in \mathbb{R}^3$, jolle pätee $W = \{\bar{x} \in \mathbb{R}^3 \mid \bar{n} \cdot \bar{x} = 0\}$.
   (c) Miten aliavaruuden W kohtisuora komplementti $W^\perp$ ja vektori $\bar{n}$ liittyvät toisiinsa?

   Yhtälöä $x_1 - 5x_2 + 8x_3 = 0$ kutsutaan tason W *normaalimuotoiseksi yhtälöksi*. Vektoria $\bar{n}$ kutsutaan tason W *normaaliksi*. Aiheesta löytyy lisätietoa kurssimateriaalin ykkösosan luvusta 13.4.

6. Polynomiavaruudessa $\mathcal{P}_2$ voidaan määritellä sisätulo seuraavalla kaavalla:
$$\left\langle a_2x^2 + a_1x + a_0,\ b_2x^2 + b_1x + b_0 \right\rangle = a_2b_2 + 2a_1b_1 - a_0b_0$$
   kaikilla $a_2x^2 + a_1x + a_0,\ b_2x^2 + b_1x + b_0 \in \mathcal{P}_2$. Mitkä seuraavista vektoreista kuuluvat aliavaruuden $W = \{(a+2b)x^2 + (-a+b)x - a + 4b \mid a, b \in \mathbb{R}\}$ kohtisuoraan komplementtiin $W^\perp$?

   a) $x^2 + x + 1$ b) $3x - 2$

   Perustele vastauksesi huolellisesti.

7.* Tässä tehtävässä todistetaan Pythagoraan lause. Oletetaan, että V on sisätuloavaruus ja $\bar{v}, \bar{w} \in V$. Osoita, että jos $\bar{v}$ ja $\bar{w}$ ovat kohtisuorassa toisiaan vastaan, niin
$$\|\bar{v} + \bar{w}\|^2 = \|\bar{v}\|^2 + \|\bar{w}\|^2.$$

Tehtäväsarja III

Tutustu kurssimateriaalin kappaleeseen 24.2, jossa kerrotaan ortogonaalisista jonoista.

8. Onko avaruuden $\mathbb{R}^3$ jono $(\bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3)$ ortogonaalinen, jos

   (a) $\bar{v}_1 = (4, -1, 1)$, $\bar{v}_2 = (-1, 0, 4)$ ja $\bar{v}_3 = (-4, -17, -1)$
   (b) $\bar{v}_1 = (1, 0, -1)$, $\bar{v}_2 = (-1, 2, -1)$ ja $\bar{v}_3 = (1, -1, 1)$?

Tutustu kurssimateriaalin lukuun 24.4, jossa käsitellään projektiota. Nyt emme enää projisoi pelkästään yhden vektorin virittämille aliavaruuksille, vaan aliavaruudet voivat olla useampiulotteisia.

9. Kaverisi tutki vektoriavaruuden $\mathbb{R}^3$ aliavaruutta $W = \operatorname{span}(\bar{w}_1, \bar{w}_2)$, missä $\bar{w}_1 = (2, -2, 1)$ ja $\bar{w}_2 = (1, -1, 5)$. Hän halusi laskea vektorin $\bar{v} = (1, 2, 3)$ projektion tälle aliavaruudelle. Ensin kaverisi laski projektion näin:
$$\operatorname{proj}_W(\bar{v}) = \frac{\bar{v} \cdot \bar{w}_1}{\bar{w}_1 \cdot \bar{w}_1}\bar{w}_1 + \frac{\bar{v} \cdot \bar{w}_2}{\bar{w}_2 \cdot \bar{w}_2}\bar{w}_2 = \frac{1}{9}(2, -2, 1) + \frac{14}{27}(1, -1, 5) = \left(\frac{20}{27}, -\frac{20}{27}, \frac{71}{27}\right).$$
   Tutkiessaan asiaa tarkemmin, hän huomasi, että aliavaruudelle voi löytää monta erilaista kantaa. Esimerkiksi vektorit $\bar{u}_1 = (2, -2, 1)$ ja $\bar{u}_2 = (-1, 1, 4)$ muodostavat avaruuden W kannan. Sen jälkeen hän laski projektion toisella tavalla:
$$\operatorname{proj}_W(\bar{v}) = \frac{\bar{v} \cdot \bar{u}_1}{\bar{u}_1 \cdot \bar{u}_1}\bar{u}_1 + \frac{\bar{v} \cdot \bar{u}_2}{\bar{u}_2 \cdot \bar{u}_2}\bar{u}_2 = \frac{1}{9}(2, -2, 1) + \frac{13}{18}(-1, 1, 4) = \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 3\right).$$
   Miksi vastaukset eivät ole samat? Kumpi niistä on oikea?

Tehtäväsarja IV

Tässä tehtäväsarjassa tutkitaan avaruuden $\mathbb{R}^3$ aliavaruutta $W = \text{span}(\bar{v}_1, \bar{v}_2)$, missä $\bar{v}_1 = (1, -1, -1)$ ja $\bar{v}_2 = (0, 3, 3)$.

10. Etsi aliavaruudelle W ortogonaalinen kanta seuraavasti: Valitse ensimmäiseksi kantavektoriksi $\bar{v}_1$ ja etsi sitten vektori, joka on ortogonaalinen vektorin $\bar{v}_1$ kanssa. Käytä tässä apuna projektiota $\text{proj}_{\bar{v}_1}(\bar{v}_2)$.

11.* Merkitään $\bar{a} = (2, -1, 4)$. Määritä projektio $\text{proj}_W(\bar{a})$.

12. Jatkoa edelliseen tehtävään. Kirjoita vektori $\bar{a}$ summana kahdesta vektorista, joista toinen on aliavaruuden W ja toinen aliavaruuden $W^\perp$ alkio.

Grande finale

Valitse seuraavista tehtävistä vähintään kolme. Jäljelle jäävät ovat ylimääräisiä tehtäviä.

13. Keksi surjektiivinen lineaarikuvaus avaruudelta $\mathbb{R}^3$ avaruudelle $\mathbb{R}^2$. Perustele vastauksesi. Pystytkö keksimään neljä erilaista kuvausta?

14. Autiomaassa elää kojootteja ja maantiekiitäjiä. Niiden kantojen vuosittaiset koot riippuvat toisistaan seuraavasti: Olkoon $K(n)$ kojoottien lukumäärä vuonna n ja $M(n)$ maantiekiitäjien lukumäärä vuonna n. Tällöin

$$K(n+1) = 0{,}86K(n) + 0{,}08M(n)$$

ja

$$M(n+1) = -0{,}12K(n) + 1{,}14M(n).$$

(a) Keksi matriisi A, jolle pätee

$$A \begin{bmatrix} K(n) \\ M(n) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K(n+1) \\ M(n+1) \end{bmatrix}.$$

(b) Matriisilla A on ominaisarvo 1,1, jota vastaa ominaisavaruus $\text{span}((1/3, 1))$. Jos eräänä vuonna kojootteja on 6 ja maantiekiitäjiä 18, mikä on tilanne seuraavana vuonna? Entä viiden vuoden kuluttua? Entä 20 vuoden kuluttua?

15. Tässä tehtävässä osoitetaan, että taso

$$T = \{(5a + b,\ a - b,\ 3a + 4b) \mid a, b \in \mathbb{R}\}$$

on isomorfinen avaruuden $\mathbb{R}^2$ kanssa.

(a) Osoita, että joukko T on avaruuden $\mathbb{R}^3$ aliavaruus etsimällä sille virittäjät.

(b) Mistä tiedetään, että taso T on vektoriavaruus?

(c) Määrittele lauseen 22.1 avulla lineaarikuvaus $L\colon \mathbb{R}^2 \to T$. Mikä on määrittelemäsi lineaarikuvauksen matriisi?

(d) Osoita, että L on surjektio näyttämällä, että $\operatorname{Im} L = T$.

(e) Osoita, että L on injektio.

(f) Mitä edellisten kohtien nojalla voidaan päätellä?

16. Oletetaan, että V ja W ovat vektoriavaruuksia, joille pätee $\dim(V) < \dim(W)$. Osoita, että ei ole olemassa surjektiivista lineaarikuvausta avaruudelta V avaruudelle W.

17. Oletetaan, että V on äärellisulotteinen sisätuloavaruus ja U sen aliavaruus. Oletetaan lisäksi, että $\bar{v} \in V$. Osoita, että $\bar{v} \in U$, jos ja vain jos $\operatorname{proj}_U(\bar{v}) = \bar{v}$.

18. Tutustu kurssisivulla olevaan oppimistavoitematriisiin. Mieti, mitkä oppimistavoitteet olet jo saavuttanut ja mitä asioita sinun tulee vielä harjoitella. Merkintöjen tekeminen matriisiin voi olla avuksi. (Voit vaikkapa tulostaa matriisin paperille.)

    Kirjoita ratkaisupaperiin lyhyt selostus siitä, missä asioita sinun täytyy harjoitella ja miten sen aiot tehdä.