Lineaarialgebra ja matriisilaskenta II
Helsingin yliopisto, matematiikan ja tilastotieteen laitos
Syksy 2015
Harjoitus 4

Tehtävien viimeinen palautuspäivä: pe 20.11.2015 klo 19.30
Korjausten viimeinen palautuspäivä: pe 4.12.2015 klo 19.30

Tehtäväsarja I

1. (a) Oletetaan, että $T\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ on lineaarikuvaus, jolle pätee $T(1,0) = (1,5,3)$ ja $T(1,1) = (4,0,1)$. Etsi matriisi, jonka määräämä lineaarikuvaus T on.
   (b) Tarkista, että löytämäsi matriisi kuvaa vektorit $(1,0)$ ja $(1,1)$ oikein.

2. (a) Keksi lineaarikuvaus $L\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, jolle pätee $L(1,0) = (4,4)$ ja $L(0,1) = (0,0)$.
   (b) Keksi lineaarikuvaus $L\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, jolle pätee $L(1,0,0) = (-1,5)$ ja $L(0,1,0) = (-3,15)$.

   Kuinka monta erilaista kuvausta on mahdollista keksiä kussakin tapauksessa?

3.* Etsi matriisi, jonka määrämä lineaarikuvaus peilaa ensin tason vektorit suoran $\operatorname{span}((1,1))$ suhteen ja sen jälkeen projisoi ne suoralle $\operatorname{span}((2,-1))$.

4.* Oletetaan, että $D \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Onko kuvaus

$$L\colon \mathbb{R}^{n\times n} \to \mathbb{R}^{n\times n}, \quad L(A) = AD - DA$$

lineaarinen?

Tehtäväsarja II

Tutustu materiaalin lukuun 20, jossa selviää, mitä ovat lineaarikuvauksen ydin ja kuva.

5. Tutkitaan lineaarikuvausta $L\colon \mathcal{P}_2 \to \mathbb{R}^2$, $L(a+bx+cx^2) = (a-b, b+c)$. Mitkä seuraavista polynomeista kuuluvat kuvauksen L ytimeen $\operatorname{Ker} L$?

   i. $1 + x$ ii. $x - x^2$ iii. $1 + x - x^2$

6. Tarkastellaan lineaarikuvausta

$$T\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \quad T(x_1,x_2,x_3) = (x_1+x_2,\ x_1+x_2+2x_3,\ -2x_1-2x_2).$$

   (a) Määritä kuvauksen T ydin $\operatorname{Ker} T$.
   (b) Onko lineaarikuvaus T injektio?
   (c) Selitä omin sanoin, mitä b-kohdan vastaus tarkoittaa.

7. Tutkitaan vielä lineaarikuvausta $L\colon \mathcal{P}_2 \to \mathbb{R}^2$, $L(a+bx+cx^2) = (a-b, b+c)$. Mitkä seuraavista vektoreista kuuluvat kuvauksen L kuvaan $\operatorname{Im} L$?

   i. $(0,0)$ ii. $(1,0)$ iii. $(0,1)$

8. Tarkastellaan uudelleen lineaarikuvausta

$$T\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \quad T(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2,\ x_1 + x_2 + 2x_3,\ -2x_1 - 2x_2).$$

   (a) Määritä kuvauksen T kuva $\operatorname{Im} T$ ja etsi sille virittäjät.
   (b) Onko lineaarikuvaus T surjektio?
   (c) Selitä omin sanoin, mitä b-kohdan vastaus tarkoittaa.

Tehtäväsarja III

9. Tarkastellaan lineaarikuvausta $L\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, joka kiertää tason vektoreita $90°$ myötäpäivään. Tutkitaan lisäksi aliavaruutta $W = \operatorname{span}((-1, 1))$. Piirrä kuva aliavaruudesta W ja päättele kuvan perusteella, miltä joukko LW näyttää. Etsi virittäjävektorit joukolle LW.

Tehtävissä 10–13 tutkitaan seuraavaa tulosta:

Tulos: Oletetaan, että $L\colon V \to U$ on lineaarikuvaus. Oletetaan lisäksi, että $\bar{v}_1, \ldots, \bar{v}_k \in V$ ja merkitään $W = \operatorname{span}(\bar{v}_1, \ldots, \bar{v}_k)$. Tällöin $LW = \operatorname{span}(L(\bar{v}_1), \ldots, L(\bar{v}_k))$.

10. Vertaa tulosta tehtävän 9 ratkaisuun ja tarkista, että tulos pitää siinä tapauksessa paikkansa.

11.* Selitä omin sanoin ilman matemaattisia symboleja, mitä tulos kertoo. Lyhyt ja ytimekäs vastaus riittää.

12. Todista tulos.

13. Tutkitaan kuvausta

$$L\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4, \quad L(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2,\ 4x_2,\ x_1 + x_2 + 2x_3,\ -2x_1 - 2x_2).$$

   Merkitään $W = \operatorname{span}((1, 2, 1), (1, 3, 0))$. Määritä joukko LW ja etsi sille virittäjät.

Tehtäväsarja IV

Lineaarikuvauksille voidaan määritellä ominaisarvon käsite samalla tavalla kuin matriiseille. Tutustu lukuun 22, jossa käsitellään lineaarikuvauksen ominaisarvoja.

14. Tiedetään, että lineaarikuvauksella $L\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ on ominaisvektori $\bar{v} = (0, 4, -2)$. Mikä seuraavista vektoreista voisi olla $L(\bar{v})$ ja mikä ei? Perustele vastauksesi ominaisarvon määritelmän avulla.

$$\bar{a} = (0, 2, -1), \qquad \bar{b} = (0, -12, 6), \qquad \bar{c} = (1, 1, 1)$$

15. Lineaarikuvaus $L\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ on venytys nelinkertaiseksi vaakasuunnassa ja kutistus puoleen pystysuunnassa.

   (a) Määritä $L(1, 0)$, $L(1, 0)$, $L(1, 1)$ ja $L(-1, 2)$. Perustelujen ei tarvitse olla täsmällisiä. Voit käyttää apuna kuvaa.
   (b) Määritä kuvauksen L ominaisarvot ominaisarvot ja niitä vastaavat ominaisvektorit piirroksen avulla samaan tapaan kuin kappaleessa 23.2 tehdään. Älä määritä lineaarikuvauksen matriisia.

16. Lineaarikuvaus $T\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ peilaa tason vektorit suoran $\operatorname{span}((1, 2))$ suhteen. Määritä kuvauksen T ominaisarvot ominaisarvot ja niitä vastaavat ominaisvektorit piirroksen avulla. Älä määritä lineaarikuvauksen matriisia.

Tehtäväsarja V

17. Kerää yhteen kaikki, mitä muistat lineaarikuvauksista. Keskity olennaisiin asioihin, älä nippelitietoon. Voit jäsentää tiedot haluamallasi tavalla, esimerkiksi tiivistelmän tai käsitekartan muodossa. Täydennä sen jälkeen esitystäsi kurssimateriaalin avulla.

Tehtäväsarja VI

18. Avaruudella $\mathbb{R}^2$ on kannat $\mathcal{R}$, $\mathcal{S}$ ja $\mathcal{T}$. Tiedetään, että erään vektorin $\bar{v} \in \mathbb{R}^2$ koordinaattivektori kannan S suhteen on $[\bar{v}]_{\mathcal{S}} = (4, 1)$. Lisäksi seuraavat kannanvaihtomatriisit ovat tiedossa:
$$P_{\mathcal{S}\leftarrow\mathcal{R}} = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \qquad P_{\mathcal{T}\leftarrow\mathcal{S}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$
Määritä
$$\text{(a) } [\bar{v}]_{\mathcal{T}} \qquad \text{(b) } [\bar{v}]_{\mathcal{R}} \qquad \text{(c) } P_{\mathcal{T}\leftarrow\mathcal{R}}.$$

Ylimääräinen tehtävä

Tämä tehtävä on hieman haastavampi. Sillä voi korvata minkä tahansa tähdettömän tehtävän.

19. Tutkitaan funktioita
$$\begin{aligned} f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, &\quad f(x) = x, \\ g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, &\quad g(x) = x^2 \quad \text{ja} \\ h\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, &\quad h(x) = e^x. \end{aligned}$$
Onko funktioavaruuden F jono (f, g, h) vapaa?