Lineaarialgebra ja matriisilaskenta II
Helsingin yliopisto, matematiikan ja tilastotieteen laitos
Syksy 2015
Harjoitus 3

Tehtävien viimeinen palautuspäivä: pe 13.11.2015 klo 19.30
Korjausten viimeinen palautuspäivä: pe 27.11.2015 klo 19.30

Tehtäväsarja I

1. Tässä tehtävässä käsitellään kuvausta

$$T\colon \mathbb{R}^2 \to \mathcal{P}_1, \quad T(a,b) = (a-b) + (a+b)x.$$

   (a) Miltä näyttävät aliavaruuden $\mathcal{P}_1$ alkiot?

   (b) Määritä vektorin $(-4,6)$ kuvavektori kuvauksessa T.

   (c) Onko T lineaarikuvaus?

2. Tarkastellaan kuvausta

$$S\colon \mathbb{R}^{2\times 2} \to \mathbb{R}, \quad S\left(\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}\right) = a_{11}a_{22}.$$

   Onko S lineaarikuvaus?

3.⋆ Onko olemassa lineaarikuvausta $L\colon \mathbb{R}^3 \to \mathcal{P}_2$, jolla $L(2,1,0) = 1+x$, $L(0,1,1) = 2-x+x^2$ ja $L(2,2,1) = -2+2x^2$?

Tehtäväsarja II

4. Seuraava tehtävä valottaa lineaarialgebran käyttömahdollisuuksia robotiikassa ja tietokonegrafiikassa.

   Esimerkissä 19.9 mainitaan, että vektoreita voidaan kiertää kulman φ verran origon ympäri lineaarikuvauksella, joka on matriisin

$$\begin{bmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix}$$

   määräämä. Ohjaat robottikättä, joka lähtee origosta ja ulottuu pisteeseen $(2,0)$. Käytä edellä mainittua lineaarikuvausta ja kierrä robotin kättä $120°$ origon ympäri positiiviseen kiertosuuntaan eli vastapäivään. Missä pisteessä robottikäden pää tämän jälkeen on?

5. Tutkitaan lineaarikuvausta $L\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, jolle pätee $L(1,0,0) = (2,-1)$, $L(0,1,0) = (0,3)$ ja $L(0,0,1) = (-1,1)$.

   (a) Oletetaan, että $(x_1,x_2,x_3) \in \mathbb{R}^3$. Määritä $L(x_1,x_2,x_3)$.

   (b) Etsi a-kohdan perusteella matriisi A, jonka määräämä kuvaus L on.

(c) Miten matriisissa näkyvät kantavektorien kuvavektorit $L(\bar{e}_1)$, $L(\bar{e}_2)$ ja $L(\bar{e}_3)$? Kuinka olisit voinut määrittää matriisin A ilman laskuja?

(d) Tarkista, että matriisi A toimii halutulla tavalla eli että $A\bar{e}_1 = L(\bar{e}_1)$, $A\bar{e}_2 = L(\bar{e}_2)$ ja $A\bar{e}_3 = L(\bar{e}_3)$.

Seuraavaksi hyppäämme lukuun 22.1, jossa nähdään, että jokainen lineaarikuvaus avaruudelta $\mathbb{R}^m$ avaruudelle $\mathbb{R}^n$ on jonkin matriisin määräämä. Pidä lukuun tutustuessasi mielessä edellisen tehtävän havainnot. Luvun todistuksia ei ole tarpeellista vielä tässä vaiheessa lukea tarkasti läpi.

6. Olkoon $L\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ lineaarikuvaus, joka peilaa tason vektorit suoran $\operatorname{span}((1,1))$ suhteen.

   (a) Päättele kuvan avulla, mitkä ovat kantavektorien $\bar{e}_1 = (1,0)$ ja $\bar{e}_2 = (0,1)$ kuvavektorit kuvauksessa L. (Esimerkistä 22.10 on apua.)

   (b) Etsi matriisi A, jonka määräämä kuvaus L on.

7. Etsi matriisi, jonka määräämä lineaarikuvaus projisoi tason vektorit suoralle $\operatorname{span}((1,-1))$.

Tehtäväsarja III

8. (a) Osoita, että $\mathcal{B} = ((1,1,0),(1,2,1))$ on avaruuden $W = \operatorname{span}((1,1,0),(2,3,1),(0,1,1))$ kanta.

   (b) Mikä on avaruuden W dimensio? Kuvaile omin sanoin, miltä W näyttää.

9.* Jatkoa edelliseen tehtävään. Tee seuraavista kohdista ne, jotka on mahdollista ratkaista. Jos ratkaiseminen ei ole mahdollista, kerro, mistä se johtuu.

   (a) Etsi vektori $\bar{v} \in W$, jolle pätee $[\bar{v}]_{\mathcal{B}} = (4,-6)$.
   (b) Etsi vektori $\bar{v} \in W$, jolle pätee $[\bar{v}]_{\mathcal{B}} = (4,-6,0)$.
   (c) Etsi vektori $\bar{v} \in W$, jolle pätee $[\bar{v}]_{\mathcal{B}} = (4,-6,1)$.
   (d) Etsi vektori $\bar{v} \in W$, jolle pätee $[\bar{v}]_{\mathcal{B}} = (4,-6,1,2)$.

Tehtäväsarja IV

10.* Tutki aliavaruuden määritelmän avulla, onko joukko $W = \{p \in \mathcal{P} \mid p = 0 \text{ tai } \deg(p) = 2\}$ polynomiavaruuden $\mathcal{P}$ aliavaruus.

11. Oletetaan, että A on 2×2-matriisi. Merkitään $W = \{\bar{v} \in \mathbb{R}^2 \mid A\bar{v} = 2\bar{v}\}$.

   (a) Kuvaile omin sanoin, millaisia joukon W alkiot ovat. Selitä sanallisesti, millaisen ehdon ne täyttävät.

   (b) Osoita aliavaruuden määritelmän nojalla, että W on avaruuden $\mathbb{R}^2$ aliavaruus.

Tehtäväsarja V

12. Merkitään $\bar{v}_1 = (3,3)$ ja $\bar{v}_2 = (2,1)$. Nyt $\mathcal{S} = (\bar{v}_1, \bar{v}_2)$ on avaruuden $\mathbb{R}^2$ kanta. Tutkitaan lisäksi vektoria $\bar{b} = (-5,-1)$.

    (a) Määritä koordinaattivektori $[\bar{b}]_{\mathcal{S}}$.

    (b) Havainnollista vektoria $\bar{b}$ koordinaatistossa, jonka akselit ovat vektorien $\bar{v}_1$ ja $\bar{v}_2$ suuntaisia. Miten kuvasta välittyy koordinaattivektori $[\bar{b}]_{\mathcal{S}}$?

    (c) Tutkitaan sitten luonnollisen kannan $\mathcal{E}$ vektoreita $\bar{e}_1 = (1,0)$ ja $\bar{e}_2 = (0,1)$. Määritä koordinaattivektorit $[\bar{e}_1]_{\mathcal{E}}$ ja $[\bar{e}_2]_{\mathcal{E}}$ sekä $[\bar{e}_1]_{\mathcal{S}}$ ja $[\bar{e}_2]_{\mathcal{S}}$.

    (d) Muodosta matriisi P, jonka sarakkeina ovat $[\bar{e}_1]_{\mathcal{S}}$ ja $[\bar{e}_2]_{\mathcal{S}}$.

    (e) Mitä matriisilla P kertominen tekee koordinaattivektoreille $[\bar{e}_1]_{\mathcal{E}}$ ja $[\bar{e}_2]_{\mathcal{E}}$? Entä koordinaattivektorille $[\bar{b}]_{\mathcal{E}}$?

Tutustu kannanvaihtomatriiseihin, jotka esitellään luvussa 18. Pidä samalla mielessä edellisen tehtävän havainnot. Kannanvaihtomatriisilla kertomalla yhden kannan suhteen kirjoitettu koordinaattivektori voidaan muuttaa toisen kannan suhteen kirjoitetuksi koordinaattivektoriksi.

13. Tutkitaan avaruuden $\mathbb{R}^2$ kantoja $\mathcal{S} = ((3,3),(2,1))$ ja $\mathcal{T} = ((1,2),(1,-1))$.

    (a) Määritä kannanvaihtomatriisi $P_{\mathcal{T} \leftarrow \mathcal{S}}$ kannasta $\mathcal{S}$ kantaan $\mathcal{T}$.

    (b) Erään vektorin koordinaatit kannan $\mathcal{S}$ suhteen ovat 4 ja -10. Mitkä ovat tämän vektorin koordinaatit kannan $\mathcal{T}$ suhteen?

Ylimääräinen tehtävä

14. Oletetaan, että V on vektoriavaruus, jolla on aliavaruudet W ja U. Aliavaruuksien W ja U *summa* on joukko
$$W + U = \{w + u \mid w \in W, u \in U\}.$$

    (a) Tarkastellaan avaruuden $\mathbb{R}^3$ aliavaruuksia $W = \text{span}(\bar{e}_1)$ ja $U = \text{span}(\bar{e}_2)$. Määritä $W + U$. Miltä se näyttää?

    (b) Osoita, että jos W ja U ovat avaruuden V aliavaruuksia, myös summa $W + U$ on avaruuden V aliavaruus.

    (c) Kohdassa b osoitettiin, että kahden aliavaruuden summa on aina aliavaruus. Millä muilla tavoilla kahdesta aliavaruudesta voidaan muodostaa uusia aliavaruuksia? (Vihje: Voit miettiä esimerkiksi joukko-operaatioita.)